Laborator 8. Reprezentări grafice 3D în Matlab 7.9

Bibliografie

1. M. Ghinea, V. Fireţeanu, *Matlab: Calcul numeric- Grafică-Aplicaţii*, ed. Teora, Bucureşti, 1998.
2. **I. Iatan**, *Îndrumător de laborator în Matlab 7.0*, Ed. Conspress, Bucureşti, 2009.
3. D. Xue, Y. Chen, *Solving Applied Mathematical Problems with Matlab*, Taylor & Francis Group, 2009.
4. **I. Iatan**, *Rezolvarea unor probleme de matematică aplicată în inginerie cu Matlab*, în curs de publicare.

Matlab 7.9 dispune de funcţii speciale care permit realizarea reprezentărilor grafice 3D, funcţii ilustrate mai jos.

Funcţia	**Semnificaţie**
X=linspace(x1,x2,n)	Generează un vector X cu n componente, cuprinse în intervalul $[x1, x2]$. Pasul dintre doua componente este $pas = (x2 - x1)/(n-1)$. Daca valoarea lui n este omisa, atunci aceasta este considerata implicit egala cu 100.
[X,Y]=meshgrid(x,y)	Returnează în matricele X şi Y, perechile de coordonate ale tuturor punctelor din domeniul definit de vectorii x şi y; matricele sunt utile pentru reprezentări grafice 3D.
mesh(X,Y,Z)	Reprezintă grafic suprafaţa $Z(X,Y)$ sub forma unei retele
surf(X,Y,Z)	Reprezintă grafic suprafaţa “plină” descrisă de matricele X, Y, Z
plot3(X,Y,Z)	Reprezintă grafic câte o linie în spaţiu prin punctele ale căror coordonate sunt elementele matricelor X , Y , Z
plot3(X1,Y1,Z1,’linie tip1’,X2,Y2,Z2,’linie tip2…)	Realizează reprezentări grafice 3D multiple, tipurile şi culorile liniilor precizându-se precum în cazul funcţiei *plot*
ezplot3(f,g,h)	Trasează graficul unei curbe 3D, dată sub forma parametrică

	$(f(t), g(t), h(t))$, în care parametrul t aparţine intervalului $[0, 2\pi]$
emesh(f,domeniul,N)	Reprezintă graficul unei suprafeţe $f(x, y)$, sub forma unei reţele, în domeniul specificat, ce conţine o reţea formată din $N \times N$ puncte; implicit $N = 60$
ezsurf(f,g,h,[a.b])	Trasează graficul unei suprafeţe “plină”, dată sub forma parametrică $(f(u,v), g(u,v), h(u,v))$, în care parametrii u şi v aparţin intervalului $[a,b]$

Aplicaţii rezolvate

1. Reprezentaţi grafic în Matlab 7.9 corpul solid, de forma tetraedrului din primul octant, mărginit de planele:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

```
>> x=[1 0 0 0 0 1 0 1 0];
>> y=[0 0 1 0 0 0 0 0 1];
>> z=[0 0 0 1 0 0 1 0 0];
>> plot3(x,y,z,'-ob')
```

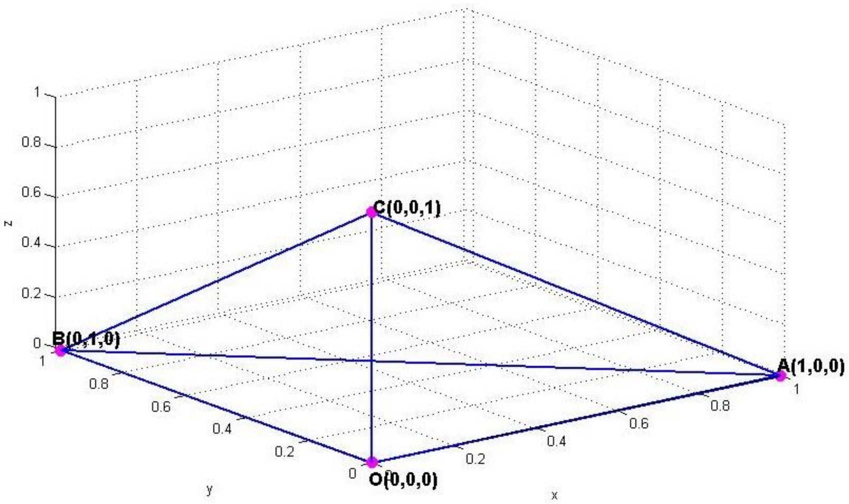
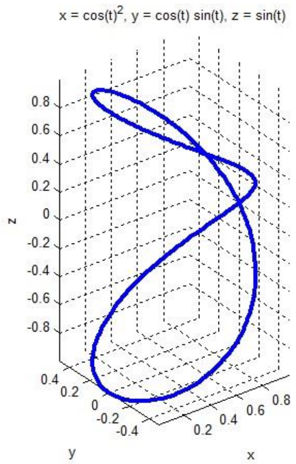


Figura 1. Reprezentarea corpului solid

2. Reprezentati grafic curba lui Viviani, ce are ecuaţia parametrică:

$$r(t)=\left(R\cos^2 t,\ R\cos t\sin t,\ R\sin t\right),\ t\in[0,2\pi].$$

```
>> syms t;
>> ezplot3(cos(t)^2, cos(t)*sin(t), sin(t), [0, 2*pi]), axis equal
```



<u>Figura 2</u>. Curba lui Viviani

3. Sa se genereze un vector X cu 5 componente, cuprinse în intervalul $[-2,3]$.

>> X=linspace(-2,3,5)

X =

-2.0000 -0.7500 0.5000 1.7500 3.0000

4. Sa se genereze matricele X şi Y pentru domeniul: $-2\le x\le 2$, $-3\le y\le 3$, cu pasul 1 pe axa Ox si pasul 3 pe axa Oy.

   Apeland in Matlab7.0 instructiunea

>> [X,Y]=meshgrid(-2:2,-3:3:3)

rezulta

X =

```
-2  -1   0   1   2
-2  -1   0   1   2
-2  -1   0   1   2
```

Y =

```
-3  -3  -3  -3  -3
 0   0   0   0   0
 3   3   3   3   3
```

5. Reprezentaţi grafic corpul mărginit de sfera $x^2+y^2+z^2=4$ şi paraboloidul $x^2+y^2=3z$.

Sfera:

- are ecuaţia în coordonate carteziene:

$$x^2+y^2+z^2=R^2; \tag{8. 1}$$

- are reprezentarea parametrică:

$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi\ ,\ \rho>0,\ \ \theta\in[0,\pi],\ \ \varphi\in[0,2\pi]. \\ z=\rho\cos\theta \end{cases} \tag{8. 2}$$

Paraboloidul eliptic:

- are ecuaţia în coordonate carteziene:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z\ ,\ a\geq b>0; \tag{8. 3}$$

- are reprezentarea parametrică:

$$\begin{cases} x\ =\ a\sqrt{2v}\cos u \\ y\ =\ b\sqrt{2v}\sin u\ ,\ u\ \in\ [0,2\pi],\ v\ >\ 0 \\ z\ =\ v \end{cases} \tag{8. 4}$$

```
>> a=sqrt(3/2); b= sqrt(3/2);
>> t=linspace(0,pi);
>> phi=linspace(0,2*pi);
>> v=linspace(0,1.1);
>> x1=a*cos(phi)'*(2*v).^(1/2);
>> y1=b*sin(phi)'*(2*v).^(1/2);
>> z1=ones(size(phi))'*v;
>>  R=2;
>> x=R*cos(phi)'*sin(t);
>> y=R*sin(phi)'*sin(t);
>> z=R*ones(size(phi))'*cos(t);
>> plot3(x,y,z,x1,y1,z1)
```

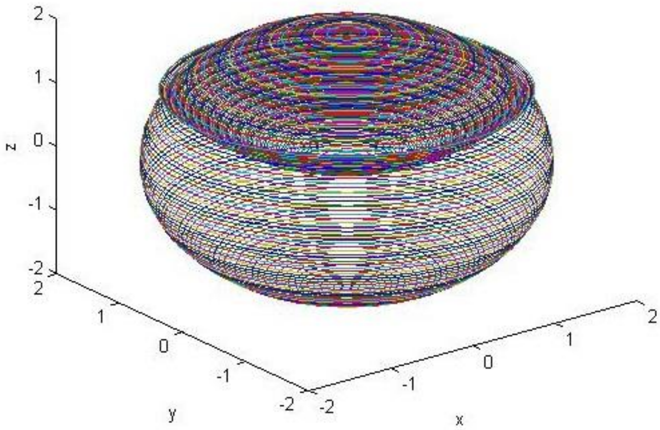


Figura 3. Corpul mărginit de sferă și paraboloid

6. Realizaţi in Matlab graficul corpului, limitat de suprafeţele:

$$\begin{cases} y^2 + 2z^2 = 4x \\ x = 2. \end{cases}$$

Secvenţa Matlab 7.9 următoare permite reprezentarea corpului omogen:

```
>> [y,z]=meshgrid(-3:.03:3,-2.5:.03:2.5);
>> x=y.^2/4+z.^2/2;
>> [m,n]=size(x);
>> x1=2*ones(m,n);
>> plot3(x,y,z,x1,y,z)
```

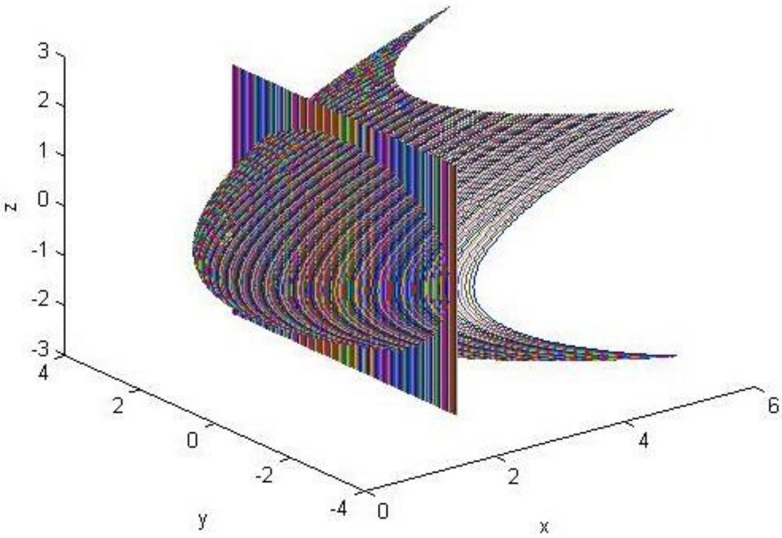


Figura 4. Reprezentarea corpului mărginit de paraboloidul eliptic și plan

7. Să se ajusteze cu planul $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$, datele prezentate în

8. **Tabelul 1.**

Tabelul 1. Performanţele a 32 autovehicule, ce folosesc benzina, drept carburant, în funcţie de:

- $\mathbf{x_1}$ semnifică numărul treptelor de viteză, cu care este înzestrat automobilul respectiv;
- $\mathbf{x_2}$ reprezintă lungimea totală a automobilului (inci);
- **y** constituie consumul în mile/ galon (1 milă/galon este echivalentă cu 282.5 litri/ 100 km).

Denumire	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	**y**
Apollo	3	200.3	18.9
Omega	3	199.6	17
Nova	3	196.7	20
Monarch	3	199.9	18.25
Duster	3	194.1	20.07
Jenson Conv.	3	184.5	11.2
Skyhawk	3	179.3	22.12
Monza	3	179.3	21.47
Scirocco	4	155.7	34.7
Corolla SR-5	5	165.2	30.4
Camaro	3	195.4	16.5
Datsun B210	4	160.6	36.5
Capri II	4	170.4	21.5
Pacer	3	171.5	19.7
Babcat	4	168.8	20.3
Granada	3	199.9	17.8
Eldorado	3	224.1	14.39
Imperial	3	231	14.89
Nova LN	3	196.7	17.8
Valiant	3	197.6	16.41
Starfire	3	179.3	23.54
Cordoba	3	214.2	21.47
Trans AM	3	196	16.59
Corolla E-5	5	165.2	31.9
Astre	4	176.4	29.4
Mark IV	3	228	13.27
Celica GT	5	171.5	23.9
Charger SE	3	215.3	19.73
Cougar	3	215.5	13.9
Elite	3	216.1	13.27
Matador	3	209.3	13.77
Corvette	3	185.2	16.5

Regresia liniară multiplă este o metodă utilizată pentru a modela relaţia liniară multiplă dintre o variabilă dependentă şi mai multe variabile independente (predictor).

Dacă se consideră datele experimentale

Variabila	y	x_1	x_2	$\dots$	x_k
Observaţia 1	y_1	x_{11}	x_{21}	$\dots$	x_{k1}
Observaţia 2	y_2	x_{12}	x_{22}	$\dots$	x_{k2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Observaţia n	y_n	x_{1n}	x_{2n}	$\dots$	x_{kn}

Regresia liniară multiplă presupune aproximarea fiecărei valori y_i prin:

$$y_i \cong \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}, \ \ i = \overline{1,n} \tag{8. 5}$$

Relaţia (8. **5)** poate fi scrisă şi sub forma vectorială:

$$y \cong X\beta, \tag{8. 6}$$

unde:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}.$$

Coeficienţii care aproximează y_i, $i = \overline{1,n}$ în sensul metodei celor mai mici pătrate se determină cu ajutorul relaţiei:

$$\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y; \tag{8. 7}$$

deci

$$\hat{y} = X\hat{\beta}. \tag{8. 8}$$

```
>> x1=[3 3 3 3 3 3 3 3 4 5 3 4 4 3 4 3 3 3 3 3 3 3 3 5 4 3 5 3 3 3 3 3];
>> x2=[200.3 199.6 196.7 199.9 194.1 184.5 179.3 179.3 155.7 165.2 195.4 ...
160.6 170.4 171.5 168.8 199.9 224.1 231 196.7 197.6 179.3 214.2 196 165.2 ...
176.4 228 171.5 215.3 215.5 216.1 209.3 185.2];
>> y=[18.9 17 20 18.25 20.07 11.2 22.12 21.47 34.7 30.4 16.5 36.5 21.5 19.7...
20.3 17.8 14.39 14.89 17.8 16.41 23.54 21.47 16.59 31.9 29.4 13.27 23.9 ...
19.73 13.9 13.27 13.77 16.5];
>> X=[ ones(length(y),1) x1' x2'];
>> u=(X'*X)^-1*X'*y'

u =

   36.4857
    3.8272
   -0.1514

>> [xx1,yy1]=meshgrid(1:0.1:7,150:0.5:250);
>> zz=u(1)+u(2)*xx1+u(3)*yy1;
>> plot3(xx1,yy1,zz,x1,x2,y,'om')
```

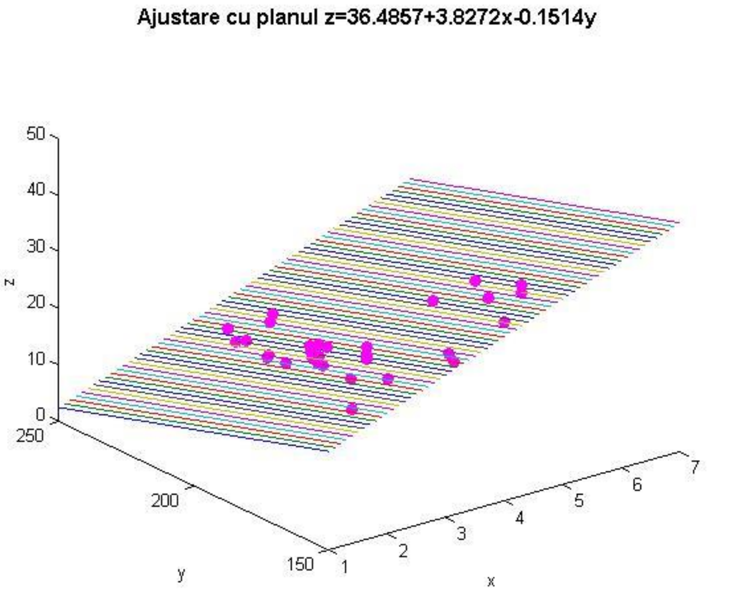


Figura 5. Ajustare cu un plan

9. Reprezentaţi grafic 3D următoarele suprafeţe:

a) $f(x,y)=\left(x^2-2x\right)\cdot e^{-x^2-y^2-xy}$, $x\in[-3,3]$, $y\in[-2,2]$

```
>> [x,y]=meshgrid(-3:0.1:3,-2:0.1:2);
>> z=(x.^2-2*x).*exp(-x.^2-y.^2-x.*y);
>> mesh(x,y,z)
```

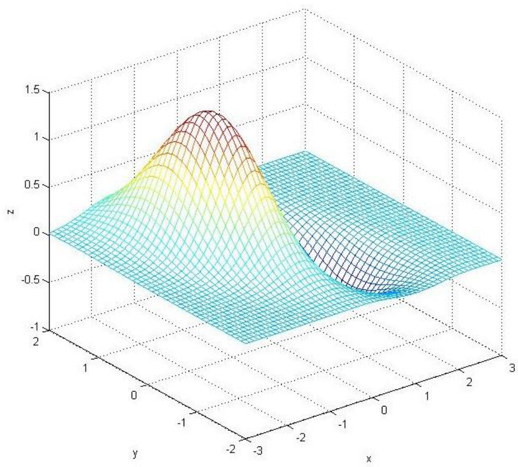


Figura 6. Reprezentarea graficăa unei suprafeţe folosind funcţia *mesh*

Utilizând funcţia *surf* în loc de *mesh* pentru reprezentarea grafică a funcției de la punctul a) vom obţine graficul:

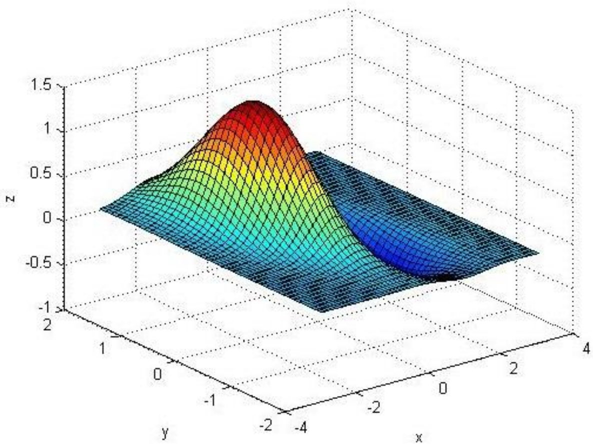
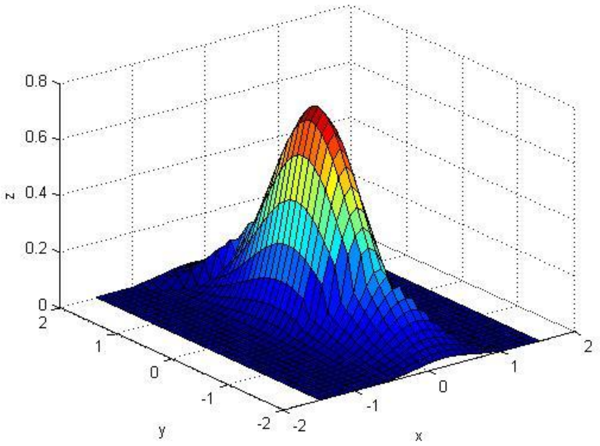


Figura 7. Reprezentarea graficăa unei suprafeţe folosind funcţia *surf*

b) $$f(x,y)=\begin{cases} 0.5457\cdot e^{-0.75y^2-3.75x^2-1.5x}, & x+y>1 \\ 0.7575\cdot e^{-y^2-6x^2}, & -1<x+y\le 1 \\ 0.5457\cdot e^{-0.75y^2-3.75x^2+1.5x}, & x+y\le -1 \end{cases}$$

```
>> [x,y]=meshgrid(-1.5:0.1:1.5,-2:0.1:2);
>> z=0.5457*exp(-0.75*y.^2-3.75*x.^2-1.5*x).*(x+y>1)+...
0.7575*exp(-y.^2-6*x.^2).*((x+y>-1)&(x+y<=1))+...
0.5457*exp(-0.75*y.^2-3.75.*x.^2+1.5*x).*(x+y<=-1);
>> surf(x,y,z)
```



<u>Figura 8.</u> Reprezentarea graficăa unei suprafeţe folosind funcţia *surf*

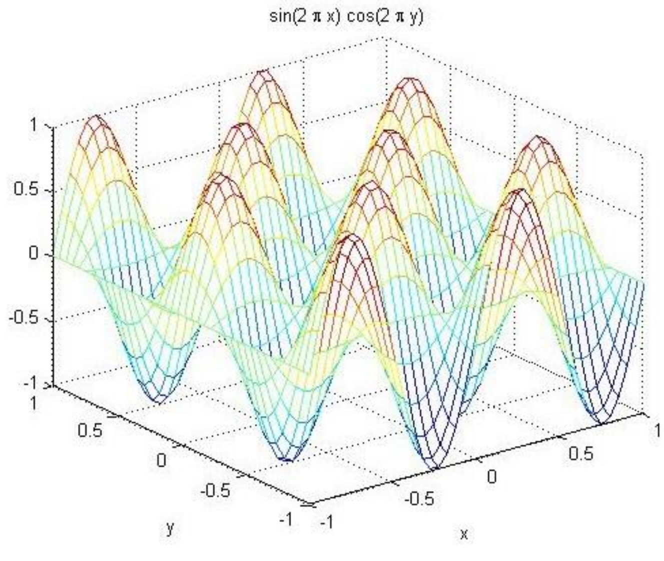
10. Să se reprezinte grafic *deplasarea*

$$u(x,y) = \sin 2\pi x \cdot \cos 2\pi y$$

a unei membrane elastice, sub acţiunea *unei sarcini având intensitatea:*

$$f(x,y) = 8\pi^2 \sin 2\pi x \cdot \cos 2\pi y.$$

```
>> ezmesh('sin(2*pi*x)*cos(2*pi*y)',[-1,1],40)
```



<u>Figura 9</u>. Reprezentarea grafică a unei suprafeţe cu *ezmesh*

11. Reprezentaţi grafic în 3D suprafaţa:

$$f(x,y) = \frac{\sin\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2},\ x, y \in [-\pi,\ \pi].$$

```
>> ezsurf('sin(x^2+y^2)/(x^2+y^2)',[-pi,pi],35)
```

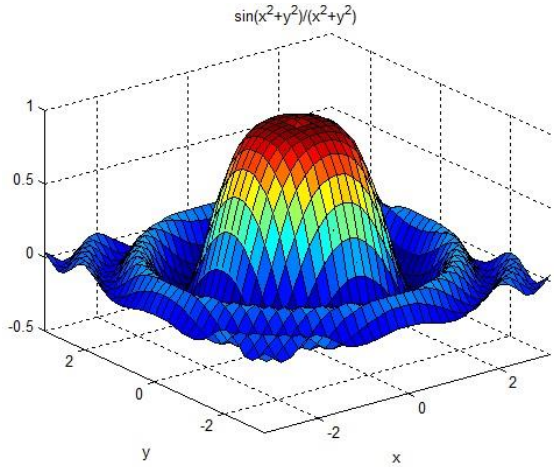


Figura 10. Reprezentarea grafică a unei suprafeţe „plină” cu *ezsurf*

12. Reprezentaţi grafic suprafaţa:

$$\begin{cases} x = a\cos u \\ y = b\cos v + a\sin u\,, \quad u, v \in [0, 2\pi],\ a = 2.5\,,\ b = 1.5\,,\ c = 1. \\ z = c\sin v \end{cases}$$

```
>> a=2.5;b=1.5;c=1;
>> syms u v
>> ezsurf(a*cos(u),b*cos(v)+a*sin(u),c*sin(v),[0, 2*pi])
```

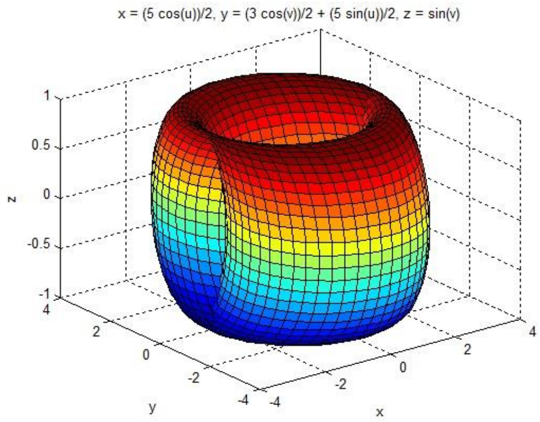
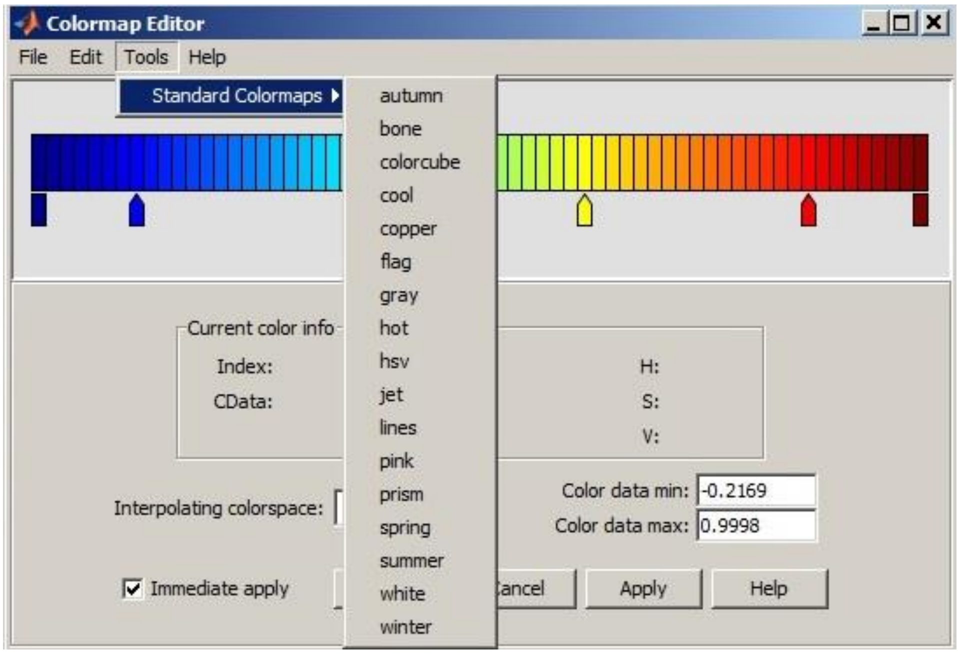


Figura 11. Reprezentarea grafică a unei suprafeţe „plină” cu *ezsurf*

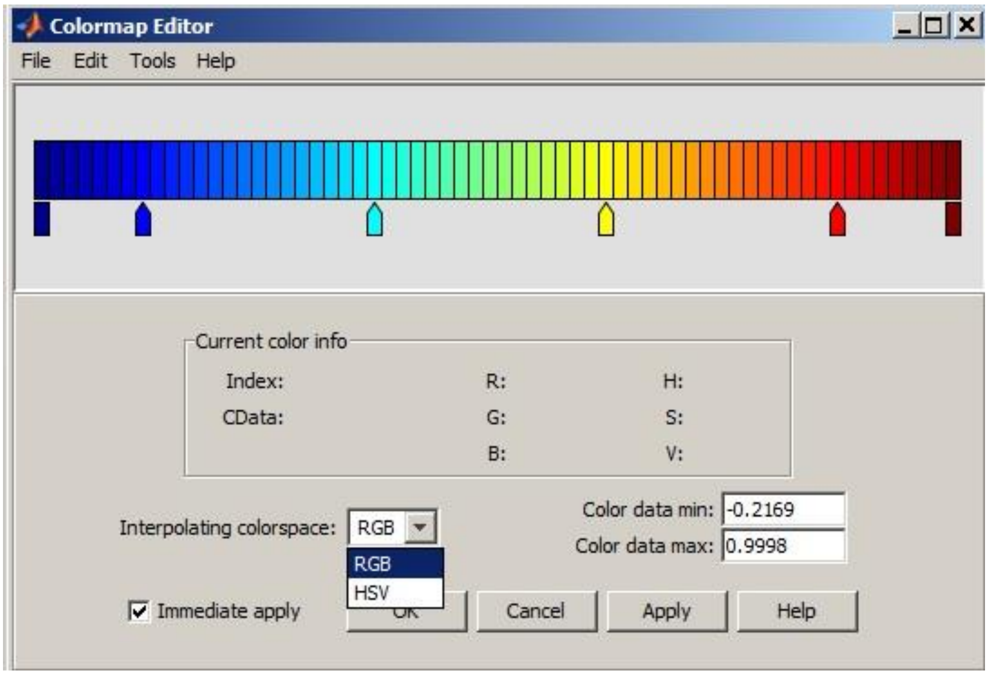
Observația 1.

(i) Matlab 7.9 oferă o serie de palete predefinite, dar utilizatorul poate defini propriile tabele de culori. Unele dintre modele predefinite de matrice de culoare sunt: *hsv, gray, hot, cool, copper, pink, summer*, etc, evidențiate în **Figura 12**.



<u>Figura 12</u>. Paletele predefinite de colorare din Matlab 7.9

(ii) Editorul *colormap* se deschide selectând opțiunea **Colormap** din meniul **Edit** și înfățișează componentele R,G,B și H,S,V corespunzătoare modelelor predefinite de matrice de culoare din **<u>Figura 12</u>**. Se poate lucra atât în spatiul de colorare RGB cât și HSV, setând elementul listei derulante **Interpolating Colorspace** RGB sau HSV, precum în. **<u>Figura 13.</u>**



<u>Figura 13.</u> Editorul *colormap* (iii)*Colormap*-ul current descris la (ii) poate fi vizualizat în figura curentă dacă se accesează butonul **Insert Colorbar**.

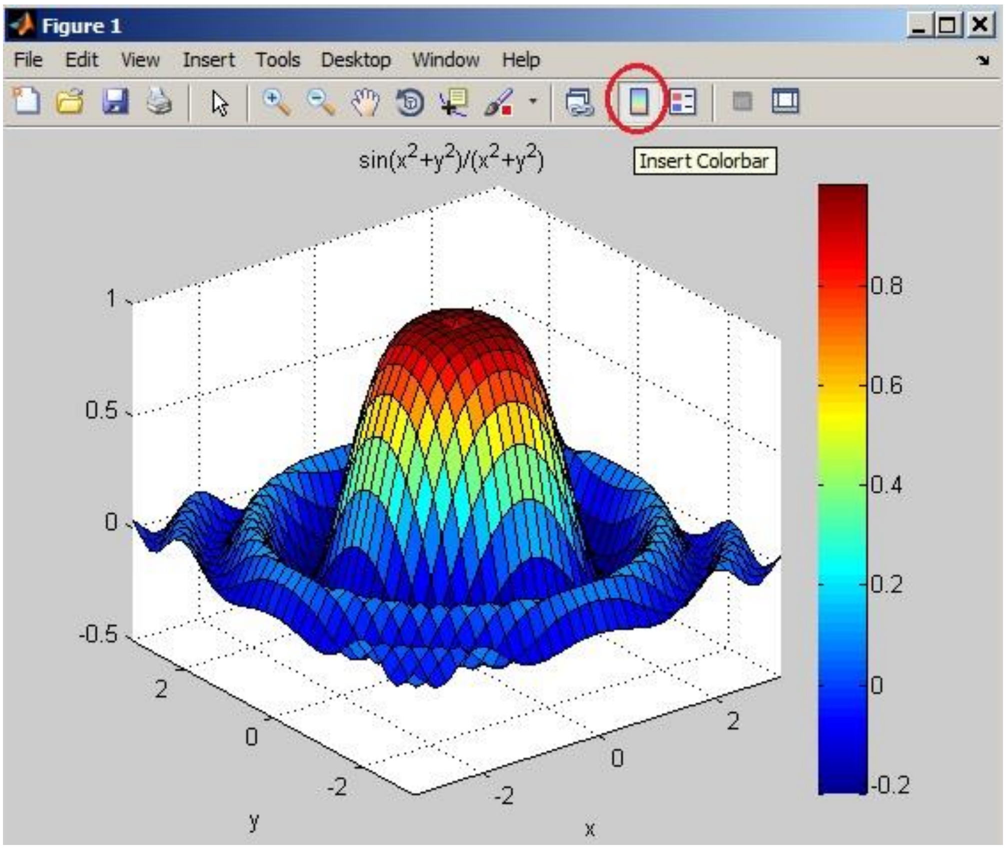


Figura 14. Afişarea colormap-ului current într-un grafic

13. Reprezentaţi grafic suprafaţa:

$$f(x, y) = \sin xy, \quad x, y \in [-1,1].$$

Îndepărtaţi apoi din suprafaţă regiunea, care are proiecţia

$$D = \left\{(x, y) \in \Re^2 \mid x^2 + y^2 \le 0.5^2\right\}$$

în planul xOy.

```
>> [x,y]=meshgrid(-1:.1:1);
>> z=sin(x.*y);
>> k=find(x.^2+y.^2<=0.5^2);
>> z(k)=NaN;
>> surf(x,y,z)
```

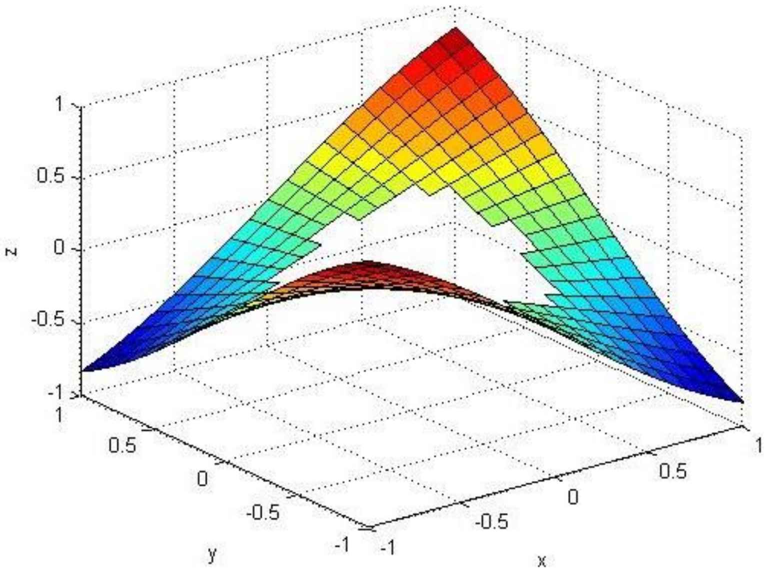


Figura 15. Îndepărtarea unei regiuni dintr-o suprafaţă

14. Rezolvaţi următoarea problemă de programare neliniară folosind metoda grafică.

$$\begin{cases} \min\left(x^2+y^2+4x+4\right) \\ x-y+2\geq 0 \\ -x^2+y-1\geq 0 \\ x\geq 0,\ y\geq 0. \end{cases}$$

```
>> [x,y]=meshgrid(0:0.02:1,1:0.02:2);
>> z=x.^2+y.^2+4*x+4;
>> k=find(x-y+2<0);
>> z(k)=NaN;
>> k=find(-x.^2+y-1<0);
>> z(k)=NaN;
>> k=find(x<0);
>> z(k)=NaN;
>> k=find(y<0);
>> z(k)=NaN;
>> surf(x,y,z)
```

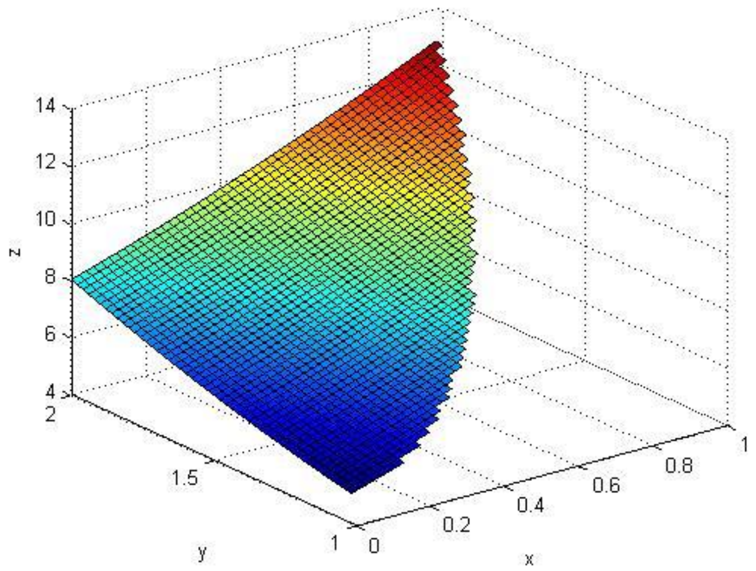


Figura 16. Metoda grafică pentru rezolvarea unei problem de programare neliniară

Pentru a determina pe grafic coordonatele punctului cerut se procedeaza astfel:

1) Se utilizeaza comanda: **dcm = datacursormode**
2) Se selecteaza punctul.
3) **C = getCursorInfo(dcm)**
4) **C = C.Position**

Aplicaţii propuse

1. Reprezentaţi grafic în 3D următoarele suprafeţe:

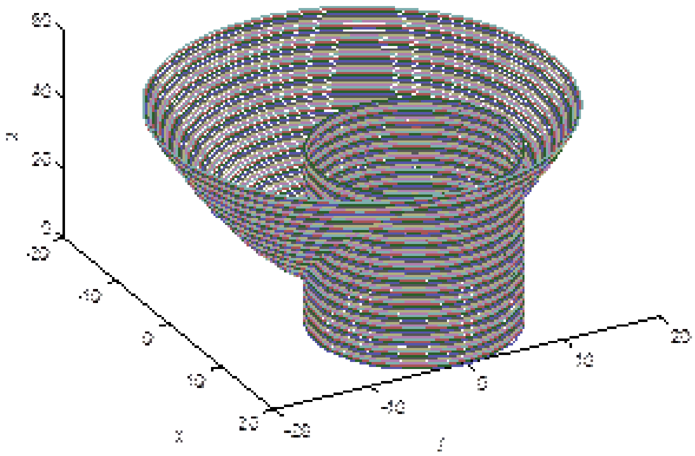
a. $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+4y^2}$

b. $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}+\cos(x+y),\ x\in[-3,9],\ y\in[-3,6]$

c. $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$

d. $\begin{cases} x = a\cos^3 u\cos^3 v \\ y = b\sin^3 u\cos^3 v \\ z = c\sin^3 v \end{cases},\ u\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right],\ v\in[-\pi,\pi].$

2. Reprezentaţi grafic corpul situat între paraboloidul $x^2 + y^2 = az$, cilindrul $x^2 + y^2 = 2ax$ şi planul $z = 0$ unde $a = \text{constant} > 0$.



3. Rezolvaţi următoarea problemă de programare neliniară folosind metoda grafică.

a) $$\begin{cases} \min\left(2x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x - 3y\right) \\ x + y \le 3 \\ 4x + y \le 9 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \max\left(-x^2 - y\right) \\ 9 \ge x^2 + y^2 \\ x + y \le 1. \end{cases}$$