Laborator 4. Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale în Matlab

Bibliografie

1. G. Anastassiou, I. Iatan, *Intelligent Routines: Solving Mathematical Analysis with Matlab, Mathcad, Mathematica and Maple*, Springer, 2013.
2. I. Iatan, *Îndrumător de laborator în Matlab 7.0*, Ed. Conspress, Bucureşti, 2009.

ECUATII CU VARIABILE SEPARABILE

O ecuaţie diferenţială *cu variabile separabile* este de forma

$$y' = p(x)q(y), \tag{4.1}$$

unde $p, q : (a,b) \to \Re$ continue, $q \neq 0$.

Formal dacă scriem

$$y' = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$$

atunci ecuaţia (4.1) devine

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{q(y)} = p(x)\mathrm{d}\,x$$

şi admite soluţia unică definită implicit prin egalitatea

$$\int \frac{\mathrm{d}\,y}{q(y)} = \int p(x)\mathrm{d}\,x + C. \tag{4.2}$$

Dacă a este un numar finit şi $q(a) = 0$ atunci $y = a$ este o soluţie particulară sau singulară a ecuaţiei (4.1).

1) Rezolvaţi ecuaţia diferenţială cu variabile separabile:

$$y' - xy^2 = 2xy$$

```
>> y=dsolve('Dy=x*y*(y+2)','x')
y =
                              0
                             -2
 -(2*exp(x^2 + 2*C3))/(exp(x^2 + 2*C3) - 1)
```

Se observă că $y = -2$ este soluţie singulară, iar $y = 0$ este soluţie particulară (rezultă din soluţia generală pentru C=0).

2) Rezolvaţi problema Cauchy:

$$\begin{cases} xy' + y = y^2 \\ y(1) = 0.5. \end{cases}$$

```
>> y=dsolve('x*Dy+y=y^2','x')
 y =
                        0
                       1
 -1/(exp(C19 + log(x)) - 1)
```

Se observa că $y = 0$ este soluţie singulară, iar $y = 1$ este soluţie particulară (rezultă din soluţia generală pentru C19=0).

Din condiţia iniţială $y(1) = 0.5$ avem C19=-1, adică rezultă soluţia particulară:

```
>> y=dsolve('x*Dy+y=y^2','y(1)=0.5','x')
 y =
 1/(x + 1)
```

Observaţie. Nu pot fi rezolvate probleme Cauchy decât în Matlab 7.0 nu şi în versiunile precedente.

ECUATII OMOGENE

Numim ecuaţie diferenţială *omogenă* o ecuaţie de forma

$$y' = f(x, y), \tag{4.3}$$

f fiind o funcţie continuă şi omogenă (de grad zero).

Ecuaţiile omogene se reduc la ecuaţii cu variabile separabile folosind schimbarea de variabilă

$$u(x) = \frac{y}{x}. \tag{4.4}$$

Înlocuind (4.4) în ecuaţia (4.3) rezultă ecuaţia

$$y' = u'x + u,$$

adică

$$u' = \frac{f(x,u) - u}{x},$$

care este o ecuatie cu variabile separabile.

3) Să se rezolve ecuaţia diferenţială omogenă:

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

```
>> dsolve('Dy=(y-x)/(y+x)','x')
Warning: Explicit solution could not be found; implicit solution returned.
> In dsolve at 310
 ans =
 -1/2*log((x^2+y^2)/x^2)-atan(y/x)-log(x)-C1 = 0
```

ECUATII NEOMOGENE

O ecuaţie diferenţială *neomogenă* (*liniară*) este de forma

$$y' = p(x)y + q(x), \tag{4.5}$$

unde p, q sunt două funcţii continue.

Propozitie. Soluţia generală a ecuaţiei liniare (4.5) este egală cu suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene $y' = p(x)y$ şi soluţia particulară a ecuaţiei neomogene (care se obţine utilizînd metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange) şi are expresia analitică

$$y(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(C_1 + \int q(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right),\ C_1 \in \Re. \tag{4.6}$$

4) Să se rezolve ecuaţia diferenţială neomogenă:

a) $y' = 2xy + 2xe^{x^2}$

```
>> y=dsolve('Dy=2*x*y+2*x*exp(x^2)','x')
 y =
 (x^2+C1)*exp(x^2)
```

b) $xy' - y = x^2 \cos x,\ x > 0$

```
>> y=dsolve('x*Dy-y=x^2*cos(x)','x')
```

y =

x*sin(x)+x*C1

ECUATII DIFERENŢIALE TOTALE

O ecuaţie diferenţială totală este de forma:

$$f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y = 0,\ \ f,g : D \subseteq \Re^2 \to \Re . \tag{4.7}$$

Dacă membrul stâng al ecuatiei (4.7) este diferenţiala totală a funcţiei $\Phi : D \to \Re$, adică

$$\mathrm{d}\Phi = f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y \tag{4.8}$$

atunci ecuaţia diferenţială este denumită *ecuaţie diferenţială exactă*.

Propoziţie. Condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţia (4.7) să fie diferenţială exactă este ca

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{4.9}$$

Propoziţie. Soluţia generală corespunzătoare unei ecuaţii diferenţiale exacte este:

$$\Phi(x,y) = C, \tag{4.10}$$

unde

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} g(x,t)\mathrm{d}t,\ (x_0,y_0) \in D. \tag{4.11}$$

Dacă condiţia (4.9) nu este îndeplinită, atunci ecuatia (4.7) trebuie să fie înmulţită cu factorul integrant $\mu(x,y)$ pentru ca aceasta să devină o ecuaţie diferenţială exactă.

Există două cazuri:

Cazul 1. Dacă $\mu = \mu(x)$ atunci condiţia (4.9) devine

$$\frac{\partial}{\partial y}(f \cdot \mu) = \frac{\partial}{\partial x}(g \cdot \mu) \Leftrightarrow \mu\frac{\partial f}{\partial y} = \mu\frac{\partial g}{\partial x} + g\mu' \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g} = \varphi(x)$$

şi

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \varphi(x)\mathrm{d}x}. \tag{4.12}$$

Cazul 2. Dacă $\mu = \mu(y)$ atunci raţionând precum în cazul 1, condiţia (4.9) devine:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial g}{\partial x}}{-f} = \varphi(y)$$

si

$$\mu(y) = \mathrm{e}^{\int \varphi(y)\,\mathrm{d}\,y}. \qquad (4.13)$$

5) Să se integreze ecuaţiile diferenţiale totale:

a) $\left(y\,\mathrm{e}^{xy} - 4xy\right)\mathrm{d}\,x + \left(x\,\mathrm{e}^{xy} - 2x^2\right)\mathrm{d}\,y = 0$

Rezolvând în Matlab ecuaţia diferenţială propusă, distingem următorii paşi.

Pasul 1. Verificăm dacă ecuaţia dacă este o ecuaţie diferenţială totală exactă.

```
>> syms x y t y0 x0 C
>>f=y*exp(x*y)-4*x*y;
>> g=x*exp(x*y)-2*x^2;
>> d1=diff(f,y);
 >> d2=diff(g,x);
>> d1==d2
ans =
    1
```

Pasul 2. Deoarece ecuaţia este o ecuaţie diferenţială totală exactă, putem aplica formula (4.11) pentru a determina soluţia sa.

```
>> phi=int(subs(subs(f,x,t),y,y0),t,x0,x)+int(subs(g,y,t),t,y0,y)-C
 phi =
 -exp(y0*x0)+2*y0*x0^2+exp(y*x)-2*x^2*y-C
```

b) $y(1+xy)\mathrm{d}\,x - x\,\mathrm{d}\,y = 0$

Pasul 1. Verificăm dacă ecuaţia dacă este o ecuaţie diferenţială totală exactă.

```
>> syms x y t y0 x0
>> f=y*(1+x*y);
>> g=-x;
>> d1=diff(f,y);
 >> d2=diff(g,x);
>> d1==d2
```

```
ans =
  0
```

Pasul 2. Deoarece ecuaţia nu este o ecuaţie diferenţială totală exactă trebuie să determinăm factorul integrant cu (4.13),

```
>> phi=simple((diff(f,y)-diff(g,x))/(-f))
phi =
-2/y
>> miu=exp(int(phi,y))
miu =
 1/y^2
```

Pasul 3. Putem aplica formula (4.11) pentru a determina soluţia ecuaţiei.

```
>> Phi=int(subs(subs(f*miu,x,t),y,y0),t,x0,x)+int(subs(g*miu,y,t),t,y0,y)-C
 Phi =
1/2*x^2-1/2*x0^2+1/y0*(x-x0)+x*(-y+y0)/y/y0-C
>> Phi=simple(Phi);
>> Phi
 Phi =
 1/2*x^2-1/2*x0^2-1/y0*x0+x/y-C
```

ECUATII BERNOULLI

Ecuaţia diferenţială de forma

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha} \tag{4.7}$$

constituie ecuaţia lui *Bernoulli*, p, q fiind funcţii continue.

Dacă

- $\alpha = 0$ ecuaţia (4.7) devine o ecuaţie diferenţială neomogenă;
- $\alpha = 1$ ecuaţia (4.7) devine o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile.

Altfel, adică pentru $\alpha \in \Re \setminus \{0,1\}$, folosind schimbarea de funcţie

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{4.8}$$

ecuaţia (4.7) se reduce la o ecuaţie diferenţială liniară neomogenă.

6) Să se integreze ec. Bernoulli:

$$\begin{cases} 2x^2 y' - 4xy = y^2 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

```
>> y=dsolve('2*x^2*Dy-4*x*y=y^2','y(1)=1','x')
y =
-2*x^2/(x-3)
```

ECUATII RICCATI

O ecuaţie diferenţială, care este de forma

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{4.9}$$

reprezintă ecuaţia lui *Riccati*, p, q, r fiind funcţii continue.

Dacă se cunoaşte o soluţie particulară $y_p(x)$ a sa, atunci folosind substituţia

$$y = y_p + \frac{1}{z} \tag{4.10}$$

ecuaţia (4.10) devine o ecuaţie diferenţială liniară (neomogenă) în z.

7) Să se integreze ecuaţia de tip Riccati:

$$xy' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x,\ x > 0,\ y_p(x) = x$$

```
>> y=dsolve('x*Dy=y^2-(2*x+1)*y+x^2+2*x','x')
 y =
              x
 x + 1/(C4*x + 1)
```

ECUATII LAGRANGE

O ecuaţie diferenţială de forma

$$y = xA(y') + B(y'), \tag{4.18}$$

A, B fiind două funcţii continue constituie o ecuaţie *Lagrange*.

Notând

$$y' = p \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = p \Leftrightarrow \mathrm{d}\,y = p\,\mathrm{d}\,x \tag{4.19}$$

ecuaţia (4.18) devine

$$y = xA(p) + B(p); \tag{4.20}$$

prin diferenţiere obţinem:

$$p\,\mathrm{d}x = A(p)\mathrm{d}x + [xA'(p) + B'(p)]\mathrm{d}p,$$

adică

$$(p - A(p))\mathrm{d}x = [xA'(p) + B'(p)]\mathrm{d}p.$$

Dacă

1. $p - A(p) \neq 0$

rezultă

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \frac{A'(p)}{p - A(p)}x + \frac{B'(p)}{p - A(p)},$$

o ecuaţie diferenţială neomogenă, având soluţia generală:

$$x = \mathrm{e}^{\int \frac{A'(p)}{p-A(p)}\mathrm{d}p}\left(C + \int \mathrm{e}^{-\int \frac{A'(p)}{p-A(p)}\mathrm{d}p} \cdot \frac{B'(p)}{p - A(p)}\mathrm{d}p\right). \tag{4.11}$$

Din (4.20) şi (4.11) deducem că soluţia generală a ecuaţiei Lagrange este:

$$y = A(p)\mathrm{e}^{\int \frac{A'(p)}{p-A(p)}\mathrm{d}p}\left(C + \int \mathrm{e}^{-\int \frac{A'(p)}{p-A(p)}\mathrm{d}p} \cdot \frac{B'(p)}{p - A(p)}\mathrm{d}p\right) + B(p). \tag{4.22}$$

2. $p - A(p)$ se anulează pe intrevalul comun de definiţie al funcţiilor A şi B, atunci vom nota cu p_1 soluţia ecuaţiei

$$p - A(p) = 0 \tag{4.22}$$

căreia îi corespunde soluţia ecuaţiei Lagrange

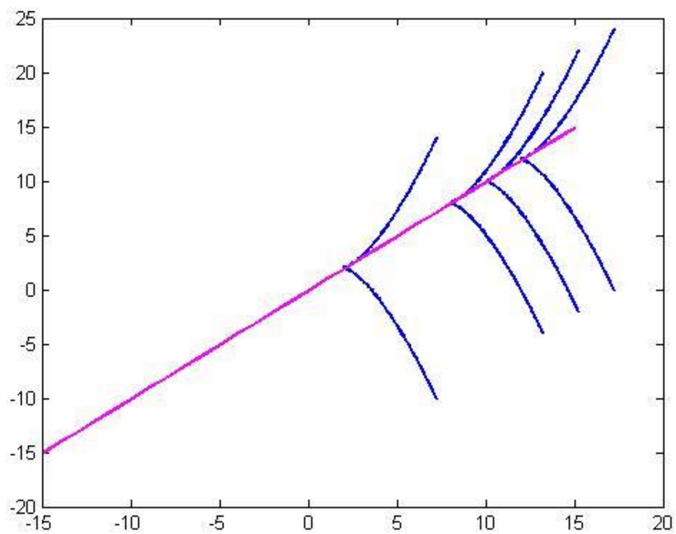
$$y = xA(p_1) + B(p_1). \tag{4.24}$$

Ecuaţia Lagrange admite drepte de forma (4.24) ca soluţii singulare.

8) Rezolvaţi ecuaţia Lagrange:

$$x - y = \frac{4}{9}y'^2 - \frac{8}{27}y'^3.$$

```
>> y=simplify(dsolve('x-y=(4/9)*Dy^2-(8/27)*Dy^3','x'))
y =
                x - 4/27
C24 + (-(C24 - x)^3)^(1/2)
C24 - (-(C24 - x)^3)^(1/2)
```



ECUAŢII CLAIRAUT

O ecuaţie diferenţială de forma

$$y = xy' + B(y'), \tag{4.25}$$

B fiind o funcţie continuă reprezintă o ecuaţie *Clairaut*.

Notând

$$y' = p$$

ecuaţia (4.25) devine

$$y = x \cdot p + B(p); \tag{4.26}$$

prin diferenţiere obţinem:

$$p\,\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}p + B'(p)\mathrm{d}p,$$

adică

$$[x + B'(p)]\mathrm{d}p = 0.$$

Dacă

1. $\mathrm{d}\,p = 0 \Rightarrow p = C$;

atunci din (4.26) obţinem

$$y = Cx + B(C), \tag{4.27}$$

ecuaţie care reprezintă o familie de drepte în plan şi constituie soluţia generală a ecuaţiei Clairaut.

2. $x + B'(p) = 0 \Rightarrow x = -B'(p)$;

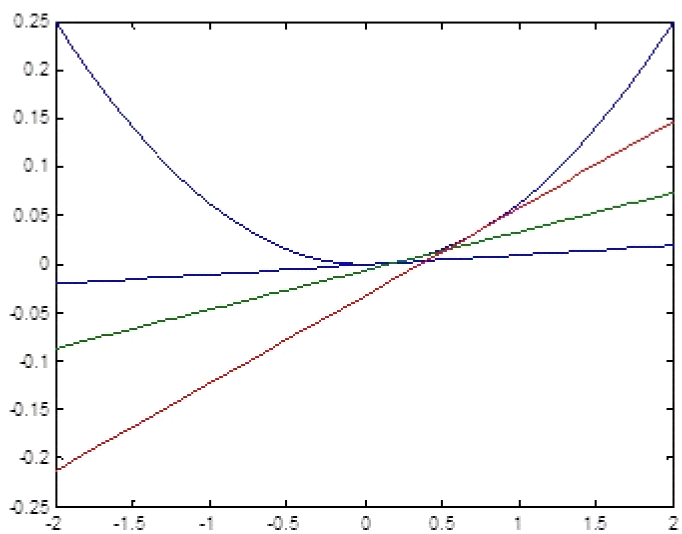
obţinem soluţia singulară a ecuaţiei Clairaut:

$$y = -pB'(p) + B(p). \tag{4.28}$$

9) Rezolvaţi ecuaţia Clairaut:

$$y = xy' - 4y'^2.$$

```
>> y=dsolve('y=x*Dy-4*(Dy)^2','x')
 y =
        x^2/16
 C31*x - 4*C31^2
```



ECUATII OMOGENE CU COEFICIENTI CONSTANTI

O ecuaţie diferenţială de forma

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{4.29}$$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sunt constante reale, $a_0 \neq 0$ se *numeşte ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordinul* n*, cu coeficienţi constanţi*.

Soluţiile ecuaţiei diferenţiale (4.29) depind de tipul rădăcinilor ecuaţiei caracteristice.

$$P(\lambda) = 0,$$

unde

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

reprezintă *polinomul caracteristic ataşat ecuaţiei diferenţiale liniară omogenă de ordinul* n*, cu coeficienţi constanţi* din (4.29).

Cazul 1. Considerăm mai întâi cazul când rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt reale şi analizăm pe rând subcazul când rădăcinile sunt distincte şi apoi cazul când ecuaţia caracteristică are şi rădăcini multiple.

a) Presupunem că ecuaţia caracteristică are toate rădăcinile reale distincte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Solutia generala a ecuatiei (4.29) este de forma

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}. \tag{4.30}$$

b) Dacă ecuaţia caracteristică are rădăcina $\lambda = \lambda_1$ reală, multiplă, de ordinul p, $p \leq n$ atunci solutia generala a ecuatiei (4.29) este de forma

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + \ldots + C_p x^{p-1} e^{\lambda_1 x}; \tag{4.11}$$

c) Ecuaţia caracteristică are k rădăcini reale $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ cu ordinele de multiplicitate $p_1, \ldots, p_k$, $p_1 + \ldots + p_k = n$. Soluţia generală a ecuaţiei (4.29) este de forma

$$y(x) = Q_{p_1 - 1}(x) e^{\lambda_1 x} + Q_{p_2 - 1}(x) e^{\lambda_2 x} + \ldots + Q_{p_k - 1}(x) e^{\lambda_k x}, \tag{4.12}$$

unde

$$Q_{p_i - 1}(x) = C_1 + C_2 x + \ldots + C_{p_i} x^{p_i - 1} \tag{4.13}$$

este un polinom de grad cel mult $p_i - 1$.

Cazul 2. Presupunem că rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt complexe şi analizăm pe rând subcazul când rădăcinile sunt distincte şi apoi cazul când ecuaţia caracteristică are şi rădăcini multiple.

a) Presupunem că ecuaţia caracteristică are toate rădăcinile complexe distincte; rezultă că ele sunt două câte două complex-conjugate. Soluţia generală a ecuaţiei (4.29) va fi:

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x + C_2 e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x + \ldots + C_k e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x + \\ &+ C_1^* e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x + C_2^* e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x + \ldots + C_k^* e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x, \end{aligned} \tag{4.14}$$

unde C_i, C_i^*, $i = \overline{1,k}$ sunt constante arbitrare.

b) Dacă ecuaţia caracteristică are rădăcina complexă $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ multiplă, de ordinul p_1 rezultă că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale va fi:

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x + C_2 x e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x + \ldots + C_{p_1} x^{p_1 - 1} e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x + \\ &+ C_1^* e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x + C_2^* x e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x + \ldots + C_{p_1}^* x^{p_1 - 1} e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x. \end{aligned} \tag{4.15}$$

c) Ecuaţia caracteristică are rădăcinile complexe

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \\ \vdots \\ \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j \end{cases}$$

cu multiplicitatile $p_1, \ldots, p_j$, unde $2(p_1 + \ldots + p_j) = n$.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (4.29) va fi:

$$y(x) = [R_1(x)\cos\beta_1 x + S_1(x)\sin\beta_1 x]e^{\alpha_1 x} + \ldots + \left[R_{p_j - 1}(x)\cos\beta_j x + S_{p_j - 1}(x)\sin\beta_j x\right]e^{\alpha_j x}, \tag{4.16}$$

unde

- $R_{p_j - 1}(x) = C_1 + C_2 x + \ldots + C_{p_j} x^{p_j - 1}$ este un polinom de grad cel mult $p_j - 1$,
- $S_{p_j - 1}(x) = C_1^* + C_2^* x + \ldots + C_{p_j}^* x^{p_j - 1}$ este un polinom de grad cel mult $p_j - 1$.

`Cazul 3`. Presupunem că ecuaţia caracteristică are:

- radacinile reale $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$, cu multiplicitatile $p_1, \ldots, p_j$

si

- radacinile complexe

$$\begin{cases} \lambda_{j+1} = \alpha_1 + i\beta_1 \\ \vdots \\ \lambda_{j+l} = \alpha_l + i\beta_l \end{cases}$$

cu multiplicitatile $p_{j+1}, \ldots, p_{j+l}$, unde

$$p_1 + \ldots + p_j + 2(p_{j+1} + \ldots + p_{j+l}) = n.$$

Solutia generala a ecuatiei (4.29) va fi:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{j} Q_{p_i-1}(x) e^{\lambda_i x} + \sum_{k=1}^{l} e^{\alpha_k x}\left[R_{p_j+k-1}(x)\cos\beta_k x + S_{p_j+k-1}(x)\sin\beta_k x\right], \quad (4.17)$$

unde

- $Q_{p_i-1}(x)$ este un polinom de grad cel mult $p_i - 1$ si are expresia (4.13),
- $R_{p_j+k-1}(x) = c_1 + c_2 x + \ldots + c_{p_k} x^{p_k-1}$ este un polinom de grad cel mult $p_k - 1$,
- $S_{p_j+k-1}(x) = c_1^* + c_2^* x + \ldots + c_{p_k}^* x^{p_k-1}$ este un polinom de grad cel mult $p_k - 1$.

10) Să se determine soluţia generală a următoarelor ecuaţii diferenţiale omogene cu coeficienţi constanţi:

a) $y'' - y = 0$

```
>> y=dsolve('D2y=y','x')
 y =
 C1*exp(x)+C2*exp(-x)
```

b) $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$

```
>> y=dsolve('D4y+5*D2y+4*y=0','x')
 y =
C1*sin(x)+C2*cos(x)+C3*sin(2*x)+C4*cos(2*x)
```

ECUATII NEOMOGENE CU COEFICIENTI CONSTANTI

O ecuaţie diferenţială de forma

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (4.18)$$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sunt constante reale, $a_0 \neq 0$ iar $f : C^{(0)}(I) \to \Re$ este o funcţie continuă pe un interval $I \subseteq \Re$ se numeşte *ecuaţie diferenţială neomogenă de ordinul* n *cu coeficienţi constanţi*.

Soluţia generală a acestei ecuaţii este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate şi o soluţie particulară (oarecare) a ecuaţiei neomogene; deci

$$y(x)=y_o(x)+y_p(x).$$

În cazul când f este o funcţie oarecare, pentru determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene se utilizează *metoda variaţiei constantelor* (sau *metoda constantelor variabile*) *a lui Lagrange*; soluţia particulară a ecuaţiei neomogene poate fi găsită sub forma

$$y_p(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\ldots+C_n(x)y_n(x),$$

unde $\{C_1'(x),C_2'(x)\ldots,C_n'(x)\}$ reprezintă soluţia sistemului algebric, liniar, de n ecuaţii, cu n necunoscute, neomogen:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+\ldots+C_n'(x)y_n(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+\ldots+C_n'(x)y_n'(x)=0 \\ \vdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x)+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)=0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=\dfrac{f(x)}{a_0}. \end{cases}$$

<u>Observaţie</u>. Dacă ordinul ecuaţiei diferenţiale neomogene este mare, atunci calculele pentru determinarea soluţiei particulare devin laborioase, deoarece sistemul care rezultă prin aplicarea metodei variaţiei constantelor are n ecuaţii, şi n funcţii necunoscute.

În cazul când $f(x)$ are o formă particulară se utilizează *metoda coeficienţilor nedeterminaţi* (sau a *identificării*).

Distingem următoarele situaţii:

<u>*Situatia 1*</u>. Membrul drept al ecuaţiei diferenţiale (4.18) este de forma

$$f(x)=C=const.$$

a) Daca $\lambda=0$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţia diferenţială (4.18) are o soluţie particulară de forma

$$y_p(x)=\frac{C}{a_n}. \tag{4.19}$$

b) Daca $\lambda=0$ este rădăcină multiplă de ordinul m a ecuaţiei caracteristice atunci ecuaţia diferenţială (4.18) are o soluţie particulară de forma

$$y_p(x) = \frac{C \cdot x^m}{m! \cdot a_{n-m}}. \tag{4.20}$$

<u>*Situatia 2*</u>. Membrul drept al ecuaţiei diferenţiale (4.18) are forma

$$f(x) = Ce^{\alpha x},$$

unde α este o constanta.

a) Daca $\lambda = \alpha$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţia diferenţială (4.18) are o soluţie particulară de forma

$$y_p(x) = \frac{C \cdot e^{\alpha x}}{P(\alpha)}. \tag{4.21}$$

b) Daca $\lambda = \alpha$ este rădăcină multiplă de ordinul m a ecuaţiei caracteristice atunci ecuaţia diferenţială (4.18) are o soluţie particulară de forma

$$y_p(x) = \frac{C \cdot x^m \cdot e^{\alpha x}}{P^{(m)}(\alpha)}. \tag{4.22}$$

<u>*Situatia 3*</u>. Membrul drept al ecuaţiei diferenţiale (4.18) este de forma

$$f(x) = P_m(x),$$

unde $P_m(x)$ este un polinom de gadul m.

a) Daca $\lambda = 0$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţia diferenţială (4.18) are o soluţie particulară de forma

$$y_p(x) = Q_m(x), \tag{4.23}$$

unde $Q_m(x)$ este un polinom de acelaşi grad ca şi $P_m(x)$, ai cărui coeficienţi se determină prin identificare, punând condiţia ca $y_p(x)$ să verifice ecuaţia neomogenă.

b) Daca $\lambda = 0$ este rădăcină multiplă de ordinul r a ecuaţiei caracteristice atunci ecuaţia diferenţială (4.18) are o soluţie particulară de forma

$$y_p(x) = x^r Q_m(x), \tag{4.24}$$

unde $Q_m(x)$ este un polinom de acelaşi grad ca şi $P_m(x)$.

<u>*Situatia 4*</u>. Membrul drept al ecuaţiei diferenţiale (4.18) este de forma

$$f(x) = e^{\alpha x} P_m(x).$$

a) Daca $\lambda = \alpha$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţia diferenţială (4.18) are o soluţie particulară de forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x} Q_m(x), \tag{4.25}$$

unde $Q_m(x)$ este un polinom de acelaşi grad ca şi $P_m(x)$, ai cărui coeficienţi se determină prin identificare, punând condiţia ca $y_p(x)$ din (4.25) să verifice ecuaţia neomogenă.

b) Daca $\lambda = \alpha$ este rădăcină multiplă de ordinul r a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţia diferenţială (4.18) are o soluţie particulară de forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x} x^r P_m(x). \tag{4.26}$$

<u>Situatia 5</u>. Membrul drept al ecuaţiei diferenţiale (4.18) este de forma

$$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x .$$

a) Daca $\lambda = \beta i$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţia diferenţială (4.18) are o soluţie particulară de forma

$$y_p(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x . \tag{4.27}$$

b) Daca $\lambda = \beta i$ este rădăcină multiplă de ordinul m a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţia diferenţială (4.18) are o soluţie particulară de forma

$$y_p(x) = x^m (A \cos \beta x + B \sin \beta x). \tag{4.28}$$

<u>Situatia 6</u>. Membrul drept al ecuaţiei diferenţiale (4.18) este de forma

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x).$$

a) Daca $\lambda = \alpha + \beta i$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţia diferenţială (4.18) are o soluţie particulară de forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x} (R_m(x) \cos \beta x + S_m(x) \sin \beta x). \tag{4.29}$$

b) Daca $\lambda = \alpha + \beta i$ este rădăcină multiplă de ordinul r a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţia diferenţială (4.18) are o soluţie particulară de forma

$$y_p(x) = x^r e^{\alpha x} (R_m(x) \cos \beta x + S_m(x) \sin \beta x). \tag{4.30}$$

<u>Situatia 7</u>. Membrul drept al ecuaţiei diferenţiale (4.18) este de forma

$$f(x) = f_1(x) + \ldots + f_k(x),$$

cu $f_i(x)$ de forma din situaţiile 1- 6.

În acest caz, ecuaţia diferenţială (4.18) are o soluţie particulară de forma

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + \ldots + y_{pk}(x), \tag{4.31}$$

cu $y_{pi}(x)$ corespunzător lui $f_i(x)$.

11) Să se determine soluţia generală a următoarelor ecuaţii diferenţiale neomogene cu coeficienţi constanţi:

a) $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$

```
>> y=dsolve('D2y-5*Dy+6*y=6*x^2-10*x+2','x')
 y =
 exp(3*x)*C2+exp(2*x)*C1+x^2
```

b) $y'' + y' - 6y = 2\cos 2x - 10\sin 2x$

```
>> y=dsolve('D2y+Dy-6*y=2*cos(2*x)-10*sin(2*x)','x')
 y =
 exp(-3*x)*C2+exp(2*x)*C1+sin(2*x)
```

c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x\sqrt{x}$, $x > 0$

```
>> y=dsolve('D3y-3*D2y+3*Dy-y=exp(x)*sqrt(x)','x')
 y =
 8/105*x^(7/2)*exp(x)+C1*exp(x)+C2*exp(x)*x+C3*exp(x)*x^2
```

d) $y'' = x + \sin x$

```
>> y=dsolve('D2y=x+sin(x)','x')
 y =
 1/6*x^3-sin(x)+C1*x+C2
```

e) $y''' = \ln x$, $x > 0$

```
>> y=dsolve('D3y=ln(x)','x')
y =
 1/6*x^3*log(x)-11/36*x^3+1/2*x^2*C1+C2*x+C3
```

O ecuaţie diferenţială liniară neomogenă *de ordin superior* cu coeficienţi variabili se poate reduce la o ecuaţie cu coeficienţi constanţi, numită ecuaţia *lui Euler*:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = f(x), \qquad (4.51)$$

cu $a_i \in \Re, i = \overline{0,n}$, iar f o funcţie continuă.

Ecuaţia lui Euler se reduce la o ecuaţie cu coeficienţi constanţi prin schimbarea variabilei independente $x = e^t$, $x > 0$.

12) Să se integereze ecuaţiile diferenţiale Euler următoare

a) $x^2 y'' - xy' + x = 6x \ln x$

```
>> y=dsolve('x^2*D2y-x*Dy+y=6*x*log(x)','x')
y =
x*C2+log(x)*x*C1+log(x)^3*x
```

b) $xy''' + y'' = 1 + x$

```
>> y=dsolve('x*D3y+D2y=1+x','x')
y =
1/12*x^3+x*log(x)*C1-C1*x+1/2*x^2+C2*x+C3
```

c) $(3x+2)^2 y'' + 7(3x+2)y' = -63x + 18$

```
>> y=dsolve('(3*x+2)^2*D2y+7*(3*x+2)*Dy=-63*x+18','x')
y =
-1/4*C1/(3*x+2)^(4/3)+15*log((3*x+2)^(1/3))-3*x+C2
```

d) $\begin{cases} y'''(x-1) - y'' = 0 \\ y(2) = 2 \\ y'(2) = 1 \\ y''(2) = 1 \end{cases}$

```
>> y=dsolve('D3y*(x-1)-D2y=0','y(2)=2','Dy(2)=1','D2y(2)=1','x')
y =
5/6+1/6*(x-1)^3+1/2*x
```

Temă

1. Rezolvaţi ecuaţia diferenţială cu variabile separabile:

   a) $1+y^2+xyy'=0$

   b) $y'=\dfrac{\sqrt{-y^2+y+1}}{\sqrt{-x^2+x+1}}$

2. Să se integreze ecuaţia diferenţială totală:

$$\left(x^2-3y^2\right)\mathrm{d}\,x+2xy\,\mathrm{d}\,y=0\,.$$

3. Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale omogene şi reductibile la omogene:

   a) $y'=\dfrac{-2xy}{x^2+y^2}$

   b) $y'=\dfrac{2(x+y-1)^2+3x(2x-y+1)}{(x+y-1)^2-3x(2x-y+1)}$

   c) $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$.

4. Să se rezolve ecuaţia diferenţială neomogenă:

   a) $y'+4xy=x\,\mathrm{e}^{-x^2}$

   b) $y'-y\,\mathrm{tg}\,x=\cos x$.

5. Să se rezolve ecuaţia diferenţială de tip Bernoulli:

   a) $y'-3xy=xy^2$

   b) $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x^2y^2}$, $x>0$, $y\neq 0$.

6. Să se integreze ecuaţia diferenţială de tip Riccati:

   a) $y'=y^2-x^2+1$

   b) $y'=\dfrac{x}{2}y^2-\dfrac{2}{x}y-\dfrac{1}{2x^3}$.

7. Să se determine soluţia generală a următoarelor ecuaţii diferenţiale omogene cu coeficienţi constanţi:

a) $y'' + y' + y = 0$

b) $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$

c) $y^{(4)} - 3y''' + 5y'' - 3y' + 4y = 0$

d) $y^{(5)} - 11y^{(4)} + 50y''' - 94y'' + 13y' + 169y = 0$.

8. Să se determine soluţia generală a următoarelor ecuaţii diferenţiale neomogene cu coeficienţi constanţi:

a) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{x}}$

b) $y'' - 6y' + 6y = \dfrac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}\mathrm{e}^{3x}$

c) $y^{(3)} - 4y' = \cos 3x$

d) $y^{(5)} + 4y''' = x^2\,\mathrm{e}^{x}$

e) $y^{(7)} - y''' = 12x$.

9. Să se integereze ecuaţiile diferenţiale Euler următoare:

a) $x^2 y'' + xy' + x = 2\sin(\ln x)$

b) $x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' - y = x$.