

Laborator 3. Calcul simbolic în Matlab 7.0 cu aplicații în Algebră

Bibliografie

1. M. Ghinea, V. Fireșteanu, *Matlab: Calcul numeric- Grafică-Aplicații*, ed. Teora, București, 1998.
2. I. Iatan, *Îndrumător de laborator în Matlab 7.0*, Ed. Conspress, București, 2009.
3. D. Xue, Y. Chen, *Solving Applied Mathematical Problems with Matlab*, Taylor & Francis Group, 2009.

Matlab 7.0 permite realizarea calculelor simbolice, ce au aplicații în Algebră.

Funcțiile utilizate în vederea efectuării acestor calcule simbolice în Matlab 7.0 sunt:

<u>Funcția</u>	<u>Semnificație</u>
det(A)	Calculează determinantul simbolic al matricei A
inv(A)	Calculează inversa simbolică a matricei A
transpose(A)	Determină transpusa simbolică a matricei A
simplify(E)	Simplifică simbolic o expresie E
simple(A)	Simplifică simbolic o expresie sau o matrice; afișează rezultatele intermediare ale calculelor, în timp ce funcția <i>simplify</i> prezintă rezultatul final
factor(E)	Factorizează expresia E
[r,p,k]=residue(B,A)	Se obține descompunerea în fracții simple pe baza parametrilor de ieșire: r (vectorul coloană al rezidurilor), p (vectorul coloană al polilor), k (vectorul linie al termenilor liberi); argumentele funcției, B și respectiv A semnifică vectorii ce conțin coeficienții polinoamelor de la numărătorul respectiv numitorul fracției, considerați în ordinea descrescătoare a puterilor nedeterminate corespunzătoare celor două polinoame
expand(E)	Realizează expandarea expresiei E
collect(P,x)	Colectează termenii asemenea din polinomul P în raport cu

	variabila precizată x
<code>coeffs(P,x)</code>	Determină coeficienții polinomului P în raport cu x
<code>poly(A,x)</code>	Determină polinomul caracteristic al matricei A în nedeterminata x
<code>subs(S,new)</code>	Înlocuiește variabila liberă din expresia S cu new
<code>subs(S,old,new)</code>	Înlocuiește variabila simbolică old din expresia S cu variabila numerică sau simbolică new
<code>subs(S,{x₁,...,x_n},{y₁,...,y_n})</code>	Înlocuiește variabilele simbolice $x_1, \dots, x_n$ din expresia S cu variabilele numerice sau simbolice $y_1, \dots, y_n$
<code>solve(eq)</code>	Rezolvă ecuația $eq = 0$ în raport cu variabila din expresia eq
<code>solve(eq,var)</code>	Rezolvă ecuația $eq = 0$ în raport cu variabila var din expresia eq
<code>solve(eq1,...,eqn,var1,...,varn)</code>	Rezolvă sistemul format din ecuațiile $eq1=0, \dots, eqn=0$ în raport cu variabilele $var1, \dots, varn$
<code>S = sym(A)</code>	Construiește obiectul simbolic S din A

Observație. Descompunerea în fracții simple se obține astfel:

$$\frac{B(x)}{A(x)} = \frac{r(1)}{x - p(1)} + \frac{r(2)}{x - p(2)} + \dots + \frac{r(n)}{x - p(n)} + k(x).$$

Dacă polul $p(j)$ este de ordinul m , atunci în descompunere vor apare termeni de forma

$$\frac{r(j)}{x - p(j)} + \frac{r(j+1)}{(x - p(j))^2} + \dots + \frac{r(j+m-1)}{(x - p(j))^m} + k(x).$$

Variabilele utilizate în calcule simbolice se declară prin comanda “scurtă” *syms*:

<code>syms var1 var2...</code>	este notația scurtă pentru <code>var1 = sym('var1');</code> <code>var2 = sym('var2');</code> ...
<code>syms var1 var2 ... real</code>	este notația scurtă pentru <code>var1 = sym('var1','real');</code> <code>var2 = sym('var2','real');</code> ...
<code>syms var1 var2 ... positive</code>	este notația scurtă pentru

```
var1 = sym('var1','positive');
var2 = sym('var2','positive'); ...
```

Aplicații

1) Scrieți sub o formă simplificată matricea

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2 x + \sin^2 x & x^2/x \\ 2 \sin x \cos x & e^{\ln x^2} \end{pmatrix}.$$

Pasul 1. Declarăm pe x ca variabilă simbolică

```
>> syms x
```

Pasul 2. Scriem matricea A

```
>> A=[cos(x)^2+sin(x)^2 x^2/x; 2*sin(x)*cos(x) exp(log(x^2))];
```

Pasul 3. Scriem sub formă simplificată matricea A

```
>> u=simple(A)
```

```
u =
```

```
[ 1, x]
```

```
[ sin(2*x), x^2]
```

2) Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculați e^{At} .

```
>> A=[-3 -1 -1; 0 -3 -1; 1 2 0];
```

```
>> syms t
```

```
>> simplify(expm(A*t));
```

3) Simplificați expresia

$$E = \frac{3^{n+2} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+1}}{3^{n+1} \cdot 5^n + 2 \cdot 3^{n+1} \cdot 5^n}.$$

Pasul 1. Declarăm pe n ca variabilă simbolică

```
>> syms n
```

Pasul 2. Scriem expresia E

```
>> E=(3^(n+2)*5^n+3^n*5^(n+1))/(3^(n+1)*5^n+2*3^(n+1)*5^n);
```

Pasul 3. Simplificăm expresia E

```
>> simplify(E)
```

```
ans =
```

```
14/9
```

4) Calculați determinantul, transpusa și inversa simbolică pentru următoarea matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Pasul 1. Declarăm pe x ca variabilă simbolică

```
>> syms x
```

Pasul 2. Scriem matricea A

```
>> A=[cos(x) -sin(x);sin(x) cos(x)];
```

Pasul 3. Calculăm determinantul simbolic al matricei A

```
>> det(A)
```

```
ans =
```

```
cos(x)^2+sin(x)^2
```

Pentru simplificarea rezultatului vom folosi

```
>> simplify(det(A))
```

```
ans =
```

```
1
```

Pasul 4. Determinăm transpusa simbolică a matricei A

```
>> transpose(A)
```

```
ans =
```

```
[ cos(x), sin(x)]
```

```
[ -sin(x), cos(x)]
```

Pasul 5. Determinăm inversa simbolică a matricei A

```
>> inv(A)
```

```
ans =
```

```
[ cos(x)/(cos(x)^2+sin(x)^2), sin(x)/(cos(x)^2+sin(x)^2)]
```

```
[ -sin(x)/(cos(x)^2+sin(x)^2), cos(x)/(cos(x)^2+sin(x)^2)]
```

5) Să se factorizeze expresia

$$E = x^3 + yx^2 - 2\sqrt{3}x^2y - 2\sqrt{3}xy^2 + 3y^2x + 3y^3.$$

```
>> syms x y
>> E=x^3+y*x^2-2*sqrt(3)*x^2*y-2*sqrt(3)*x*y^2+3*y^2*x+3*y^3;
>> factor(E)
ans =
(x+y)*(x-3^(1/2)*y)^2
```

6) Calculați suma

$$S_n = 2 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \dots + \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right), n \in \mathbb{N}.$$

```
>> syms k n
>> S=simplify(symsum(1+1/(2^(k-1)),k,1,n))
S =
n+2-2^(1-n)
```

7) Să se dezvolte determinantul

$$\begin{vmatrix} a+b & -a+b-c & b+c \\ a-b-c & a+b & a+c \\ a+c & b+c & -a-b+c \end{vmatrix}$$

iar rezultatul să fie pus sub formă de produs.

```
>> syms a b c
>> A=[a+b -a+b-c b+c;a-b-c a+b a+c;a+c b+c -a-b+c];
>> factor(det(A))
ans =
-3*(b+a+c)*(b^2+a^2+c^2)
```

8) Descompuneți în fracții simple expresia:

$$\frac{x+1}{x^3 - 7x^2 + 15x - 9}.$$

Pasul 1. Scriem vectorul linie ce conține coeficienții polinomului de la numărătorul fracției.

```
>> B=[1 1];
```

Pasul 2. Scriem vectorul linie ce conține coeficienții polinomului de la numitorul fracției.

```
>> A=[1 -7 15 -9];
```

Pasul 3. Apelăm funcția *residue*.

```
>> [r,p,k]=residue(B,A)
```

```
r =
```

```
-0.5000
```

```
2.0000
```

```
0.5000
```

```
p =
```

```
3.0000
```

```
3.0000
```

```
1.0000
```

```
k =
```

```
[]
```

Deci:

- există doi poli: primul de ordinul doi, $p(1)=3$ și cel de-al doilea de ordinul întâi, $p(2)=1$;
- descompunerea nu conține termeni liberi (deoarece k este vectorul nul).

Pe baza rezultatelor obținem următoarea descompunere în fracții simple:

$$-\frac{1}{2(x-3)} + \frac{2}{(x-3)^2} + \frac{1}{2(x-1)}$$

9) Colectați coeficienții expresiei

$$xy + x^2y^3 + x^3y + y - y^2$$

în raport cu variabila y .

```
>>syms x y
```

```
>> collect(x*y+x^2*y^3+x^3*y+y-y^2,y)
```

```
ans =
```

```
x^2*y^3-y^2+(x+x^3+1)*y
```

10) Expandați expresia:

$$E = \left(x^2 \sqrt{2} - x\sqrt{3} + \sqrt{5} \right) \left(x^2 \sqrt{2} + x\sqrt{3} + \sqrt{5} \right) - \left(x^2 \sqrt{2} + \sqrt{5} \right)^2.$$

```
>>syms x
>>E=(x^2*sqrt(2)-x*sqrt(3)+sqrt(5))*(x^2*sqrt(2)+x*sqrt(3)+sqrt(5))-
(x^2*sqrt(2)+sqrt(5))^2;
>> expand(E)
ans =
-3*x^2
```

11) Fie $p_1(x) = x + a$, $p_2(x) = x^2 + bx + c$. Calculați determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & p_1(x_1) & p_2(x_1) \\ 1 & p_1(x_2) & p_2(x_2) \\ 1 & p_1(x_3) & p_2(x_3) \end{vmatrix}$$

scriind rezultatul sub formă de produs.

```
>> syms x a b c x1 x2 x3
>>p1=x+a;
>>p2=x^2+b*x+c;
>> A=[1 subs(p1,x,x1) subs(p2,x,x1); 1 subs(p1,x,x2) subs(p2,x,x2); 1 subs(p1,x,x3)
subs(p2,x,x3)]
A =
[      1,      x1+a, x1^2+b*x1+c]
[      1,      x2+a, x2^2+b*x2+c]
[      1,      x3+a, x3^2+b*x3+c]
>> factor(det(A))
ans =
-(-x3+x2)*(x1-x3)*(x1-x2)
```

12) Rezolvați ecuația

$$x^2 - 2(m+2)x + m^2 - 1 = 0$$

în raport cu variabila x .

```
>> syms x m
>> x=solve('x^2-2*(m+2)*x+m^2-1',x)
```

x =

$$[m+2+(4*m+5)^{(1/2)}]$$

$$[m+2-(4*m+5)^{(1/2)}]$$

13) Rezolvați sistemul de ecuații următor în raport cu x, y, z :

$$\begin{cases} 3x + 4y + mz = 0 \\ 4x + my + 3z = 6 \\ mx + 3y + 4z = 3 + m \end{cases}, m \in \mathbb{R}.$$

```
>> syms x y z m
```

```
>> [x,y,z]=solve('3*x+4*y+m*z','4*x+m*y+3*z-6','m*x+3*y+4*z-3-m',x,y,z)
```

x =

$$(3*m^2+60-30*m+m^3)/(-36*m+m^3+91)$$

y =

$$(2*m^2-45-3*m)/(-36*m+m^3+91)$$

z =

$$-(3*m^2+17*m-102)/(-36*m+m^3+91)$$

14) Determinați polinomul caracteristic al matricei

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{pmatrix}.$$

```
>> A=[16 2 3 13;5 11 10 8;9 7 6 12;4 14 15 1];
```

```
>> B=sym(A);
```

```
>> syms t
```

```
>> P=poly(B,t)
```

P =

$$t^4 - 34*t^3 - 80*t^2 + 2720*t$$

15) Determinați matricea A astfel încât:

$$(2A - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix})^T = 3A^T + (2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix})^T.$$

Pasul 1. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.

```
>> syms a b c
```

>> A=[a b c];

Pasul 2. Calculăm $X = (2A - 3 \cdot (1 \ 2 \ 0))^T - 3A^T - (2 \ 1 \ -1)^T$.

>> X=transpose(2*A-3*[1 2 0])-3*transpose(A)-transpose([2 1 -1])

X =

[-a-5]

[-b-7]

[-c+1]

Pasul 3. Determinăm a, b, c astfel încât $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

>> [a b c]=solve(X(1),X(2),X(3))

a =

-5

b =

-7

c =

1

Teme

1. Se consideră matricea

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Calculați:

$$X^2 - 2aX + (a^2 + b^2)I_2,$$

unde I_2 semnifică matricea unitate de ordinul doi.

2. Fie matricele pătrate

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculați

$$(A+B)^{100}.$$

3. Simplificați expresiile:

$$\text{a) } E = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x}$$

$$\text{b) } F = \left(\frac{x^2}{x+2} - \frac{x^3}{x^2 + 4x + 4} \right) : \left(\frac{x}{x+2} - \frac{x^2}{x^2 - 4} \right)$$

$$\text{c) } G = \frac{x^2 + x \sin \frac{\pi}{4} - 3}{x \sin \frac{\pi}{4} - 1}.$$

4. Calculați suma

$$S_n = 1^3 + 4^3 + 7^3 + \dots + (3n-2)^3, n \in \mathbb{N}.$$

5. Se consideră polinomul

$$P(x) = (x+3)^2(x^2 + 3x + 2)(x^3 + 12x^2 + 48x + 64)$$

a) Scrieți P sub o formă simplificată.

b) Dezvoltați expresia lui P .

6. Descompuneți în fracții simple expresia:

$$\text{a) } \frac{1}{x^5 + x + 1}$$

$$\text{b) } \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}$$

$$\text{c) } \frac{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 10}{(x-3)(x+1)^2}.$$

7. Expandați expresia:

$$\text{a) } x(x-2)^2(x-3)^3$$

$$\text{b) } (p+q)^3 - 3(p+q)^2(p-q) + 3(p+q)(p-q)^2 - (p-q)^3.$$

8. Factorizați expresia:

a) $E = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z)$

b) $F = (2m-3)(m-1)^2 - 4(2m-3).$

9. Să se scrie sub forma unui singur polinom produsul a două polinoame:

a) $(X^3 + X^2 - 1)(X^2 - X + 1)$

b) $(X^2 - \sqrt{2\sqrt{2}}X + \sqrt{2})(X^2 + \sqrt{2\sqrt{2}}X + \sqrt{2}).$

10. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$$

scriind rezultatul sub formă de produs.

11. Să se calculeze determinantul Vandermonde de ordinul patru:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}.$$

12. Înlocuiți variabila simbolică b din expresia

$$2a^2 + 8b^3a - 3(b-4)$$

cu valoarea 4.

13. Se consideră expresia

$$E(x) = mx + n, \quad m, n \in \mathfrak{R}, \quad m \neq 0.$$

Calculați:

$$E(x-1) + 2E(x+2) - 3E(x+1).$$

14. Rezolvați ecuația

a) $3x^3 - 2mx + 1 - m = 0, \quad m \in \mathfrak{R}$

$$\text{b) } \frac{2^x + a \cdot 3^x}{2^x - a \cdot 3^x} = 2, \quad a \in \mathfrak{R}$$

în raport cu variabila x .

15. Rezolvați sistemul de ecuații următor:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + ax^2 + 6b + 3y^2 = 0 \\ a + x + 3 = y \end{cases}, \quad a, b \in \mathfrak{R}$$

$$\text{b) } \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}, \quad a \in \mathfrak{R} \text{ în raport cu } x, y, z:$$

16. Determinați a, b și c astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x + ay + cz = 0 \\ bx + cy - 3z = 1 \\ ax + 2y + bz = 5 \end{cases}$$

are soluția $x = 3, y = -1, z = 2$.

17. Determinați matricea A astfel încât:

$$\left(A + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$