

Laborator 10. Calcule numerice și simbolice în Matlab 7.0 cu aplicații în Științe ingineresti

Funcțiile utilizate în vederea efectuării acestor calcule simbolice în Matlab 7.0 sunt:

Funcția	Semnificație
fourier(f)	Calculează transformata Fourier directă
fourier(f,u)	Calculează transformata Fourier directă, transformând funcția de w, în funcție de u
ifourier(F)	Calculează transformata Fourier inversă
ifourier(F,x)	Calculează transformata Fourier inversă, transformând funcția de t, în funcție de x
laplace(f)	Determină transformata Laplace a funcției f
laplace(f,u)	Calculează transformata Laplace directă, transformând funcția de s, în funcție de u
ilaplace(F)	Calculează transformata Laplace inversă a funcției F
ilaplace(F,x)	Calculează transformata Laplace inversă, transformând funcția de t, în funcție de x
ztrans(f)	Determină transformata în Z (unilaterală) a funcției f
ztrans(f,u)	Determină transformata în Z (unilaterală) a funcției f, ca funcție de u
iztrans(F)	Calculează transformata în Z (unilaterală) inversă
iztrans(F,k)	Calculează transformata în Z (unilaterală) inversă, fiind funcție de k

Transformata Fourier și transformata Z sunt fundamentale pentru prelucrările digitale de imagini.

SERII FOURIER

Seriile Fourier se folosesc în toate domeniile fizicii, matematicii și tehnicii. De exemplu, seriile Fourier se utilizează în studiul multor probleme de fizică, care sunt modelate prin ecuații cu derivate parțiale.

Fie $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție periodică, cu perioada $2L$. Dacă această funcție satisface condițiile Dirichlet (condițiile suficiente ca funcția să poată fi dezvoltată în serie Fourier) atunci seria Fourier a funcției $f(x)$ este:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

unde:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1. \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{cases}$$

Observații. (1) Dacă $f(x)$ este $2L$ periodică și pară, atunci seria sa Fourier este o serie Fourier de cosinusuri. În acest caz,

$$\begin{cases} b_n = 0, (\forall) n \geq 1 \\ a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, (\forall) n \geq 0. \end{cases}$$

(2) Similar, dacă $f(x)$ este impară, seria sa Fourier este o serie Fourier de sinusuri iar coeficienții săi Fourier sunt:

$$\begin{cases} a_n = 0, (\forall) n \geq 0 \\ b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, (\forall) n \geq 1. \end{cases}$$

Forma armonică a descompunerii în serie Fourier este:

$$f(x) \sim \frac{M_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[M_n \cos\left(\varphi_n - \frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

conținând amplitudinile M_n și fazele φ_n cosinusoidelor, unde:

$$\begin{cases} M_0 = a_0 \\ \varphi_0 = 0 \\ M_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, (\forall) n > 0 \\ \varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}, (\forall) n > 0. \end{cases}$$

Exemplul 1. Dezvoltați în serie Fourier de cosinusuri funcția $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, 4 periodică. Reprezentați grafic diferite sume parțiale ale seriei Fourier pentru a le compara cu funcția originală $f(x)$. Desenați apoi spectrul Fourier (amplitudinea) al seriei Fourier de cosinusuri.

```
In[1]:= Export["aa.m", FourierCosSeries[Abs[t], t, 6]]
Out[1]= aa.m

>> aa
aa =
'(* Created by Wolfram Mathematica 8.0 : www.wolfram.com *)'
'Pi/2 - (4*Cos[t])/Pi - (4*Cos[3*t])/(9*Pi) - (4*Cos[5*t])/(25*Pi)'
>> x=[-2:0.1:2];
>> g=pi/2 - (4*cos(x))/pi - (4*cos(3*x))/(9*pi) - (4*cos(5*x))/(25*pi);
>> f=abs(x);
>> plot(x,f,x+4,f,'b',x-4,f,'b',x,g,'r',x+4,g,'r',x-4,g,'r')
```

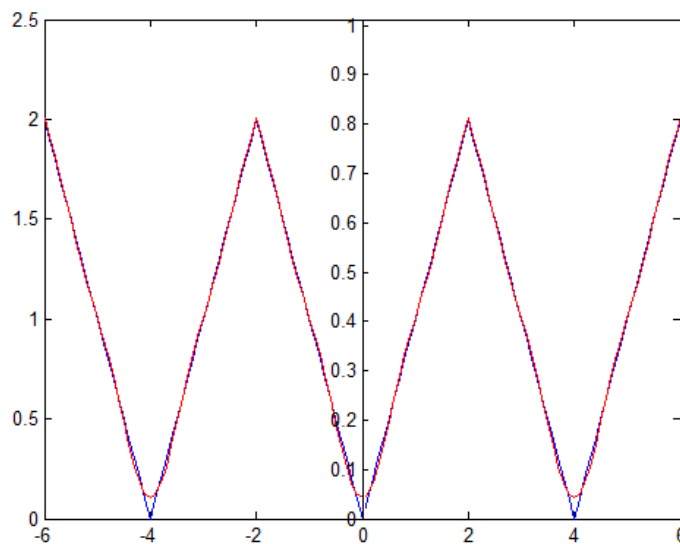


Fig. 1. Graficele funcțiilor f și g (funcția sumelor parțiale de ordinul 6 ale seriei Fourier)

Se observă că graficele funcțiilor f și g sunt simetrice față de axa Oy.

```
>> syms n t
>> f=abs(t);
>> n=-10:10;
>> an=@(n) int(f*cos((n*pi*t)/2),t,0,2);
>> stem(n,abs(an(n)))
```

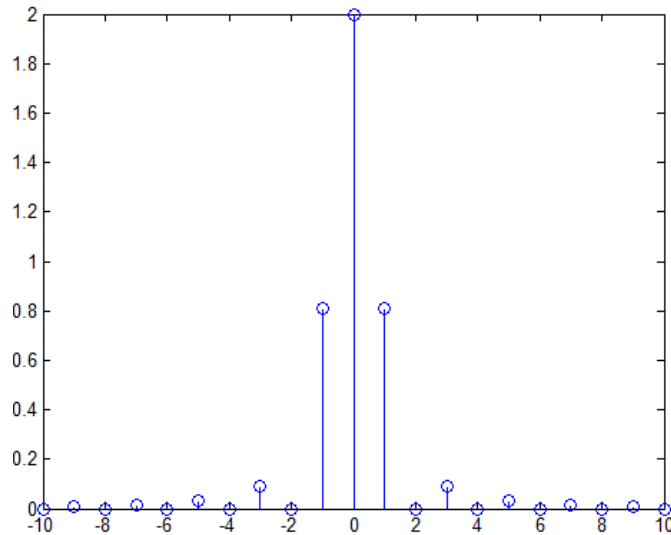
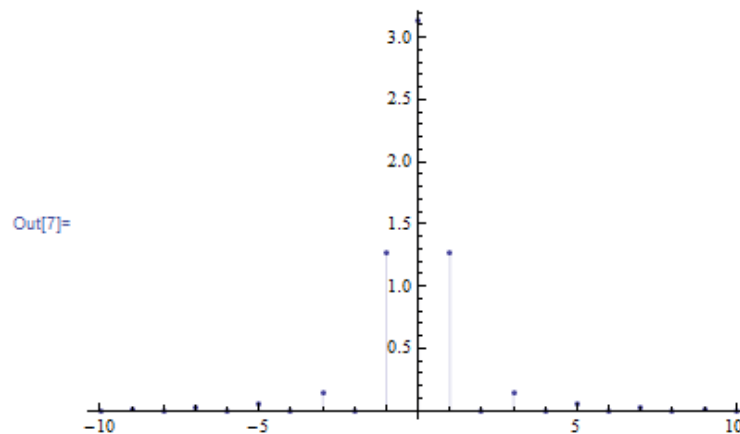


Fig. 2. Coeficienții spectrali ai seriei Fourier de cosinusuri a funcției f

Observație. Mathematica permite o rezolvare mai rapidă, comparativ cu Matlab-ul.

```
In[11]:= f[n_] := FourierCosCoefficient[Abs[t], t, n]
In[7]:= DiscretePlot[Abs[%], {n, -10, 10}, PlotRange -> All]
```



TRANSFORMATĂ FOURIER

Transformata Fourier constituie generalizarea seriei Fourier la funcțiile neperiodice, majoritatea fiind întâlnite în inginerie.

Transformata Fourier directă a funcției neperiodice $x(t)$ transformă un semnal din domeniul de timp în domeniul de frecvență, adică:

$$X(\omega) = \mathfrak{T}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Transformata Fourier inversă transformă componentele din domeniul frecvenței în semnalul din domeniul de timp, adică:

$$x(t) = \mathfrak{T}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Funcția $X(\omega)$ este în general o funcție complexă, de variabilă ω :

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\phi(\omega)},$$

unde: $|X(\omega)|$ este denumită *amplitudinea* lui $x(t)$ iar $\phi(\omega)$ reprezintă *spectrul de fază*.

Exemplul 2. a) Calculați transformata Fourier a semnalului

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0.$$

```
>> syms t; syms a positive
```

```
>> f=exp(-a*abs(t));
```

```
>> fourier(f)
```

```
ans =
```

```
(2*a)/(a^2 + w^2)
```

b) Verificați rezultatul obținut folosind transformata Fourier inversă.

```
>> h=simple(ifourier((2*a)/(a^2 + w^2),w,t));
```

```
h =
```

```
heaviside(-t)*exp(a*t) + heaviside(t)/exp(-a*t)
```

c) Reprezentați grafic semnalul $x(t)$ și amplitudinea sa.

```
>> t=-2:0.01:2;
```

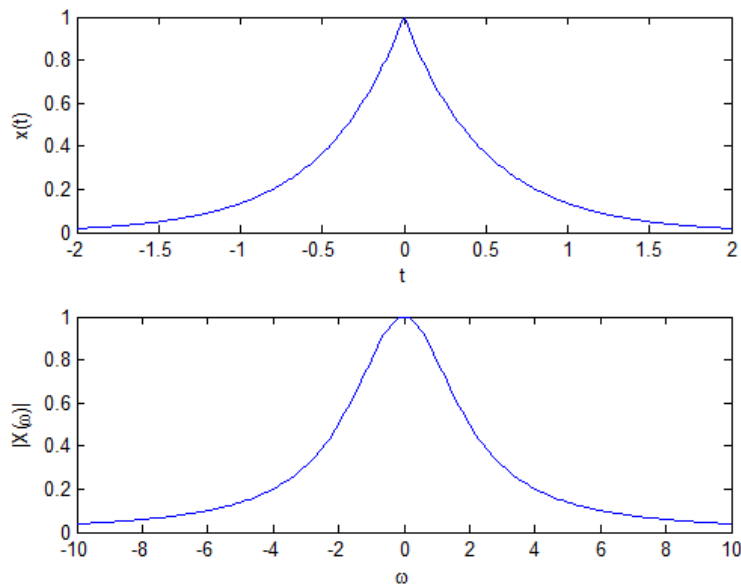
```
>> x=@(t,a) exp(-a*abs(t));
```

```
>> w=-10:0.1:10;
```

```

>> F=@(w,a) (2*a)./(a^2 + w.^2);
>> subplot(2,1,1);
>> plot(t,x(t,2));
>> xlabel('t','FontSize',10);
>> ylabel('x(t)','FontSize',10);
>> subplot(2,1,2);
>> plot(w,abs(F(w,2)));
>> xlabel('\omega','FontSize',10);
>> ylabel('|X(\omega)|','FontSize',10);

```



Exemplul 3. a) Calculați transformata Fourier a semnalului

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

```

>> syms w t;
>> int(exp(-i*w*t),t,-1,1)
ans =
(2*sin(w))/w

```

b) Reprezentați grafic semnalul $x(t)$ amplitudinea și spectrul de fază.

```

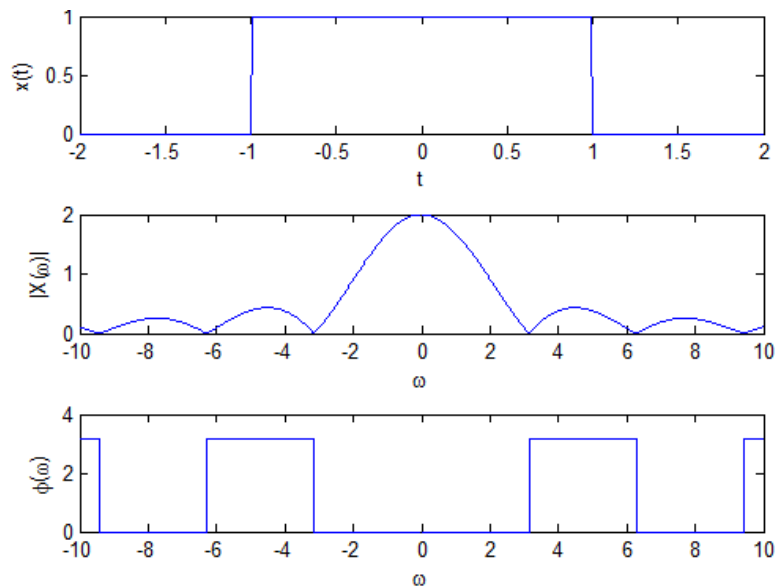
>> subplot(3,1,1);
>> t=-2:0.01:2;
>> x=1.*(abs(t)<1)+0.*(abs(t)>1);

```

```

>> plot(t,x)
>> xlabel('t','FontSize',10);
>> ylabel('x(t)','FontSize',10);
>> subplot(3,1,2);
>> w=-10:0.01:10;
>> F=@(w) (2*sin(w))./w;
>> plot(w,abs(F(w)));
>> xlabel('\omega','FontSize',10);
>> ylabel('|X(\omega)|','FontSize',10);
>> subplot(3,1,3);
>> plot(w,angle(F(w)));
>> xlabel('\omega','FontSize',10);
>> ylabel('\phi(\omega)','FontSize',10);

```



TRANSFORMATA LAPLACE

Transformata Laplace este o generalizare a transformatei Fourier, ce poate fi utilizată pentru transformarea ecuațiilor diferențiale în ecuații algebrice. Transformata Laplace directă, unilaterală a unei funcții $f(t)$ este:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Transformata Laplace inversă se calculează folosind formula:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\infty} F(s) e^{st} ds.$$

Exemplul 4. Calculați transformata Laplace a funcției:

$$f(t) = t^2 e^{-2t} \sin t$$

```
>>syms t
>> f=@(t) t^2*exp(-2*t)*sin(t);
>> F=simple(laplace(f(t)))
F =
2*(3*s^2+12*s+11)/(s^2+4*s+5)^3
```

Exemplul 5. Determinați transformata Laplace inversă pentru funcția

$$G(s) = 7 \frac{s+9}{(s+12)(s-9)}$$

```
>> syms s
>> G=7*(s+9)/((s+12)*(s-9));
>> ilaplace(G)
ans =
6*exp(9*t) + 1/exp(12*t)
```

Exemplul 6. Un semnal cauzal continuu $x(t)$ are transformata Laplace

$$X(s) = \frac{s+2}{s^3 + 8s^2 + 17s + 10}.$$

Determinați transformata Laplace a semnalului

$$y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}.$$

Exemplul 7. Rezolvați problema Cauchy următoare folosind transformata Laplace:

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t} \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

```
>> syms s t;
>> y=ilaplace(laplace(exp(-t))/(s^2+3*s+2))
```


y =

1/exp(2*t) - 1/exp(t) + t/exp(t)

Verificare:

>> subs(y,t,0)

ans =

0

>> subs(diff(y,t),0)

ans =

0

Exemplul 8. Se consideră circuitul RC din Fig. 3. Semnalul de intrare este reprezentat în fig. 4.

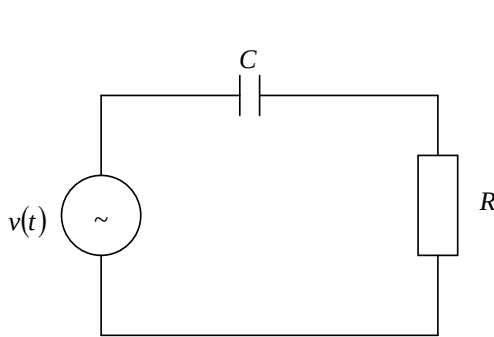


Fig 3. Circuit RC

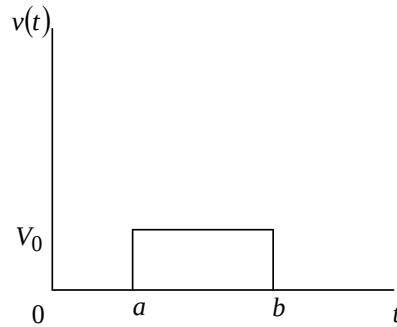


Fig 4. Tensiunea $v(t)$

Ecuția diferențială a sarcinii electrice transportate prin circuit (ec. integrala care modelează circuitul) este:

$$R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = v(t). \quad (1)$$

Folosind transformata Laplace, determinați intensitatea curentului $i(t)$ care încarcă condensatorul C.

Din fig. 4 se poate observa că tensiunea poate fi exprimată în funcție de funcția treaptă unitate (ale cărei valori sunt 0 pentru argumente negative și 1 pentru argumente pozitive):

$$v(t) = V_0 [u(t-a) - u(t-b)] \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă:

$$R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = V_0 [u(t-a) - u(t-b)] \quad (3)$$

```

>> syms V0 R C a b v t positive
>> syms s F
>> U=simplify(laplace(V0*(heaviside(t-a)-heaviside(t-b))))
U =
(V0*(1/exp(a*s) - 1/exp(b*s)))/s
>> R*F+F/(s*C)-U
ans =
F*R + F/(C*s) - (V0*(1/exp(a*s) - 1/exp(b*s)))/s
F=solve('F*R + F/(C*s) - (V0*(1/exp(a*s) - 1/exp(b*s)))/s',F)
F =
((C*V0)/exp(a*s) - (C*V0)/exp(b*s))/(C*R*s + 1)
>> h=ilaplace(F);
>> pretty(h) ;

```

TRANSFORMATA ÎN Z

Transformata în Z este o generalizare a seriei Fourier. Transformata în Z (bilaterală) a unei funcții discrete $x(n)$ are expresia:

$$X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}.$$

Pentru semnale cauzale, transformata în Z (unilaterală) este:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (4)$$

Mulțimea valorilor lui z pentru care seria din (4) este convergentă constituie regiunea de convergență (ROC) corespunzătoare transformatei în Z (unilaterală).

Transformata în Z inversă are expresia:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi \cdot j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz.$$

Exemplul 9. Calculați transformata în Z pentru:

$$a) \quad x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad \text{ROC pentru } X(z) \text{ este } D = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{2} \right\}.$$

```

>> syms n;
>>ztrans((1/2)^n)
ans =
z/(z - 1/2)

```

b) $x(n) = \begin{cases} 2^n, & n \geq 0 \\ 3^n, & n < 0. \end{cases}$ ROC pentru $X(z)$ este $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3\}$.

```

>> syms n;
>> X=ztrans(3^n+(2^n-3^n)*heaviside(n));
>> simplify(X)
ans =
2/(z - 2) + 1

```

Exemplul 10. Calculați transformata în Z inversă pentru funcția:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > a\}.$$

```

>> syms a positive
>> syms n z;
>> iztrans(X,z,n)
ans =
a^n

```

Teme

- a) Dezvoltați în serie Fourier funcția

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ 2 - x, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

4 periodică.

- Dezvoltați în serie Fourier de sinusuri funcția

$$g(x) = \begin{cases} 2x + x^2, & -2 \leq x \leq 0 \\ 2x - x^2, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

4 periodică.

- c) Reprezentați grafic diferite sume parțiale ale seriei Fourier pentru a le compara cu funcția originală. Desenați apoi spectrul Fourier (amplitudinea) corespunzător seriei Fourier respective.

2. Calculați transformata Fourier a semnalului

$$x(t) = t^2(3\pi - 2|t|)$$

și apoi verificați rezultatul obținut folosind transformata Fourier inversă. Reprezentați grafic semnalul $x(t)$ și amplitudinea sa.

3. Calculați transformata Laplace a funcției:

a) $f(t) = e^{-12t} + 6e^{9t}$

b) $f(t) = e^{-at} \sin(bt)$

4. Determinați transformata Laplace inversă pentru funcția

a) $F(s) = \frac{s+2}{s^2+1}$

b) $G(s) = \ln \frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}$

5. Un semnal cauzal continuu $x(t)$ are transformata Laplace

$$X(s) = \frac{s+2}{s^3+8s^2+17s+10}.$$

Determinați transformata Laplace a semnalului

$$y(t) = 2x(t).$$

6. Rezolvați problema Cauchy următoare folosind transformata Laplace:

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

7. Calculați transformata în Z pentru:

a) $x(n) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n < 0. \end{cases}$

$$\text{b) } x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 5 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n > 5. \end{cases}$$

8. Calculați transformata în Z inversă pentru funcția:

$$\text{a) } X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > a\}.$$

$$\text{b) } X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}, \quad D = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{2}\right\}.$$