Capitolul 2. Calcule numerice și simbolice în Matlab

Sistemul interactiv MATLAB permite realizarea calculelor numerice şi simbolice, ce au aplicaţii atât în domeniul matematic cât şi ingineresc.

MATLAB are deci două tipuri de funcții:

1) numerice- o funcție numerică constituie un program scurt, care operează cu numere pentru a produce numere;
2) simbolice- o expresie simbolică a unei funcții operează cu variabile simbolice pentru a produce rezultate simbolice.

2.1. Polinoamele în Matlab

Polinoamele constituie o categorie de funcţii speciale, MATLAB-ul oferă un *toolbox* aparte pentru tratarea acestora.

MATLAB poate reprezenta un polinom

$$P(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$$

cu coeficienţi reali sau complecşi, în următoarele două moduri:

A) printr-un vector (tablou unidimensional) al coeficienţilor săi, consideraţi în ordinea descrescătoare a puterilor lui X; de aceea, numărul de componente ale acestui vector este egal cu $n+1$:

$$P = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n-1} \quad a_n];$$

B) sub formă simbolică (va fi utilizată în secţiunea 2.3).

Cele două forme privind reprezentarea polinoamelor în MATLAB sunt echivalente din punct de vedere algebric.

Toolbox-ul ***Polynomials*** din Matlab 7.9 dispune de următoarele funcţii, care permit relizarea operaţiilor cu polinoame:

- **poly(v)**: determină coeficienţii polinomului, cunoscându-i rădăcinile menţionate în vectorul **v** ;

Exemplul 2. 1. Să se determine polinomul care are rădacinile:

$$x_1 = -1.2,\ x_2 = 2.5,\ x_3 = 3.4.$$

```
>> x=[-1.2 2.5 3.4];
>> poly(v)

ans =

    1.0000   -4.7000    1.4200   10.2000
```

- **poly(A)**: determină coeficienţii polinomului caracteristic al matricei **A**;
- **roots(P)**: determină rădăcinile polinomului **P**;
- **poly(A,x)**: construieşte polinomul caracteristic al matricei **A**, având nedeterminata **x**;
- **polyval(P,x)**: evaluează valoarea unui polinom **P** într-unul sau mai multe puncte, ce sunt componente ale vectorului **x**;

<u>Exemplul 2. 2</u>. Reprezentaţi în Matlab polinomul

$$P(X) = 3X^3 + 2X - 7,$$

determinaţi valoarea sa în punctul $a = -1$ şi rădăcinile sale.

```
>> P=[3 0 2 -7];
>> polyval(P,-1)

ans =

   -12

>> roots(P)

ans =

  -0.5799 + 1.2944i
  -0.5799 - 1.2944i
   1.1598
```

- **polyvalm(P,A)**: evaluează valoarea unui polinom **P** în sens matriceal, **A** fiind matricea pătratică în care se evaluează valoarea polinomului respectiv.

<u>Exemplul 2. 3</u>. Se consideră polinomul $p(X) = X^2 + 1$ şi matricea $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze $P(A)$.

```
>> p=[1 0 1];
>> a=[1 2; 2 3];
>> polyvalm(p,a)

ans =

     6     8
     8    14
```

- **[r,p,k]=residue(B,A)**: Se obţine descompunerea în fracţii simple pe baza parametrilor de ieşire:
  - r (vectorul coloană al rezidurilor)
  - p (vectorul coloană al polilor)
  - k (vectorul linie al termenilor liberi);

  argumentele funcţiei, **B** şi respectiv **A** semnifică vectorii ce conţin coeficienţii polinoamelor de la numărătorul, respectiv numitorul fracţiei, consideraţi în ordinea descrescătoare a puterilor nedeterminatei corespunzătoare celor două polinoame.

<u>**Observaţia 2. 1**</u>. Descompunerea în fracţii simple se obţine astfel:

$$\frac{B(x)}{A(x)}=\frac{r(1)}{x-p(1)}+\frac{r(2)}{x-p(2)}+\cdots+\frac{r(n)}{x-p(n)}+k(x).$$

Dacă polul $p(j)$ este de ordinul m, atunci în descompunere vor apare termeni de forma:

$$\frac{r(j)}{x-p(j)}+\frac{r(j+1)}{(x-p(j))^2}+\cdots+\frac{r(j+m-1)}{(x-p(j))^m}+k(x).$$

<u>**Exemplul 2. 4**</u>. Descompuneţi în fracţii simple expresia:

$$\frac{x+1}{x^3-7x^2+15x-9}.$$

<u>**Pasul 1**</u>. Scriem vectorul linie ce conţine coeficienţii polinomului de la numărătorul fracţiei.

```
>> B=[1 1];
```

<u>**Pasul 2**</u>. Scriem vectorul linie ce conţine coeficienţii polinomului de la numitorul fracţiei.

```
>> A=[1 -7 15 -9];
```

Pasul 3. Apelăm funcţia *residue*.

```
>> [r,p,k]=residue(B,A)

r =

   -0.5000
    2.0000
    0.5000


p =

    3.0000
    3.0000
    1.0000


k =

     []
```

Deci:

- există doi poli: primul de ordinul doi, $p(1)=3$ şi cel de-al doilea de ordinul întâi, $p(2)=1$;
- descompunerea nu conţine termeni liberi (deoarece k este vectorul nul).

Pe baza rezultatelor obţinem următoarea descompunere în fracţii simple:

$$-\frac{1}{2(x-3)}+\frac{2}{(x-3)^2}+\frac{1}{2(x-1)}.$$

- **conv(P_1, P_2)**: returnează un vector ale cărui componente sunt coeficienţii polinomului produs $\mathbf{P_1P_2}$;
- **[Q,R]=deconv(P_1, P_2)**: returnează câtul Q şi restul R, ce corespund împărţirii polinomului $\mathbf{P_1}$ la $\mathbf{P_2}$, adică $P_1=QP_2+R$;

Observaţia 2. 2. Din punct de vedere algebric, înmulţirea polinoamelor coincide cu operaţia de convoluţie dintre aceste polinoame, în timp ce împărţirea polinoamelor este echivalentă cu deconvoluţia acestora.

- **polyder(P)**: determină vectorul ale cărui componente sunt coeficienţii polinomului derivat P', asociat lui **P**;

- **polyint(P)**: calculează coeficienţii unei primitive lui P, adică ai polinomului $\int P(X)\mathrm{d}X = Q(X) + C,$ considerând $C = 0;$
- **polyint(P,C)** calculează coeficienţii unei primitive lui P, adică ai polinomului $\int P(X)\mathrm{d}X = Q(X) + C,$ specificând constanta **C**;
- **poly2sym(v)** converteşte polinomul reprezentat prin vectorul coeficienţilor **v,** într-o expresie simbolică;
- **poly2sym(v,t)** converteşte polinomul reprezentat prin vectorul coeficienţilor **v,** într-o expresie simbolică, în nedeterminata **t**;
- **sym2poly(P)** returnează un vector, ce are drept componente coeficienţii polinomului **P**, reprezentat sub formă simbolică.

Exemplul 2. 5. Să se scrie sub formă simbolică polinomul, care are coeficienţii: 1, 0, -3, 4 şi verificaţi apoi operaţia inversă.

```
>> v=[1 0 -3 4];
>> P=poly2sym(v)

P =

x^3 - 3*x + 4

>> u=sym2poly(P)

u =

     1     0    -3     4
```

- **polyfit(x,y,n)**: aproximează un set de date (**x, y**) cu un polinom de gradul *n*, în sensul metodei celor mai mici pătrate; funcţia returnează un vector, ale cărui componente semnifică coeficienţii polinomului de aproximare.

Exemplul 2. 6. Să se ajusteze printr-o parabolă datele tabelei următoare:

x_i	0	1	2	3
y_i	-0.13	-1	1.8	9

```
>> x=0:3;
>> y=[-0.13 -1 1.8 9];
>> p=polyfit(x,y,2)

p =

    2.0175   -3.0335   -0.0935
```

- **gcd(A,B)**: determină cel mai mare divizor comun al polinoamelor **A** şi **B**;
- **lcm(A,B)**: determină cel mai mic multiplu comun al polinoamelor **A** şi **B**.

Exemplul 2. 7. Aflaţi cel mai mic multiplu comun al polinoamelor:

$$A(X) = X^2 + 2X + 3$$

$$B(X) = 4X^2 + 5X + 6.$$

```
>> A=[1 2 3];
>> B=[4 5 6];
>> lcm(A,B)

ans =

     4    10     6
```

2.2. Calcul numeric în Matlab

Pe lângă calculele numerice cu polinoame, Matlab 7.9 dispune şi de funcţii destinate calculelor numerice cu matrice.

Funcţiile din Matlab 7.9 care realizează calcule numerice asupra tablorilor de date sunt:

- **norm(X)**: calculează norma euclidiană corespunzătoare unui vector sau matrice **X**;
- **norm(X,2)**: echivalentă cu **norm(X)**;
- **norm(X,P)**: returnează norma **P** a vectorului sau matricei **X**; **P** poate fi: $1, 2, \infty$;
- **norm(X,'fro')**: calculează norma Frobenius corespunzătoare unui vector sau matrice **X**;
- **det(A)**: calculează determinantul matricei pătratice **A**;

- **rank(A)**: determină rangul matricei **A**;
- **inv(A)**: calculează inversa matricei pătratice **A**;

Observaţia 2. 3. Inversa matricei **A** există dacă şi numai dacă determinantul său este nenul. Această condiţie este îndeplinită dacă şi numai dacă vectorii coloană ai matricei **A** sunt liniari independenţi.

- **trace(A)**: determină urma matricei pătratice **A**;
- **eig(A)**: returnează un vector, ce conţine valorile proprii ale matricei **A**;

Observaţia 2. 4.

(i) Valorile proprii ale unei matrice simetrice sunt reale.

(ii) Valorile proprii ale unei matrice antisimetrice sunt pur imaginare sau 0.

(iii) Valorile proprii ale unei matrice ortogonale sunt reale sau complex conjugate și au valoarea absolută egală cu 1.

- **[V,D]=eigs(A)**: returnează matricea diagonală **D**, ce conţine valorile proprii ale matricei **A** şi matricea **V**, ale cărei coloane sunt vectorii proprii corespunzători valorilor proprii;
- **eigs(A,k)**: returnează un vector, ce conţine cele mai mari **k** valori proprii ale matricei **A**, în valoare absolută;
- **[V,D]=eigs(A,k)**: returnează *matricea diagonală* **D**, ce conţine cele mai mari **k** valori proprii (în valoare absolută) ale matricei **A** şi *matricea* **V**, ale cărei coloane sunt vectorii proprii corespunzători acestor valori proprii;

Exemplul 2. 8. Determinați cele mai mari patru valori proprii și vectorii proprii corespunzători pentru matricea:

$$A=\begin{pmatrix} 30 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{pmatrix}.$$

```
>> A=[30 2 3 13; 5 11 10 8; 9 7 6 12; 4 14 15 1];
>> [V,D]=eigs(A,4)

V =

   -0.7354   -0.6701    0.2355   -0.0901
   -0.3815    0.4857    0.0254   -0.7105
   -0.4138    0.2745    0.4977    0.6797
   -0.3774    0.4897   -0.8344    0.1584


D =

   39.3960         0         0         0
         0   17.8208         0         0
         0         0   -9.5022         0
         0         0         0    0.2854
```

- **jordan(A)**: returnează forma canonică Jordan asociată matricei **A**;

<u>Observația 2. 5</u>. O matrice pătratică **A** se numește jordanizabilă dacă există o matrice nesingulară **C**, astfel încât $\mathbf{C^{-1}AC}$ să fie o matrice sub forma canonică Jordan.

- **[C,J]=jordan(A)**: returnează matricea **J**, ce constituie forma canonică Jordan asociată matricei **A** și respectiv matricea nesigulară C, astfel încât $\mathbf{J=C^{-1}AC}$;

<u>Exemplul 2. 9</u>. Să se determine forma canonică Jordan asociată matricei

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

```
>> A=[3 -2 1;2 -2 2;3 -6 5];
>> [C,J]=jordan(A)

C =

     1     1    -1
     2     0     0
     3     0     1


J =

     2     1     0
     0     2     0
     0     0     2
```

Vom verifica în Matlab 7.9 că matricea A este jordanizabilă.

```
>> J==C^-1*A*C

ans =

     1     1     1
     1     1     1
     1     1     1
```

- **orth(A)**: transformă matricea A într-o matrice ortogonală;
- **chol(A)**: determină descompunerea Cholesky a matricei simetrică şi pozitiv definită **A**;
- **[L, U]=lu(A)**: determină descompunerea **LU (**factorizarea Gauss**)** a matricei pozitiv definită **A**, astfel încât **A**=**LU**, unde **L** este o matrice inferior triunghiulară, iar **U** fiind o matrice superior triunghiulară;
- **[Q, R]=qr(A)**: determină descompunerea **QR** a matricei $\mathbf{A}\in\Re^{m\times n}$, astfel încât **A**=**QR**, unde $\mathbf{Q}\in\Re^{m\times m}$ este o matrice ortogonală, iar $\mathbf{R}\in\Re^{m\times n}$ fiind o matrice este superior trapezoidală;

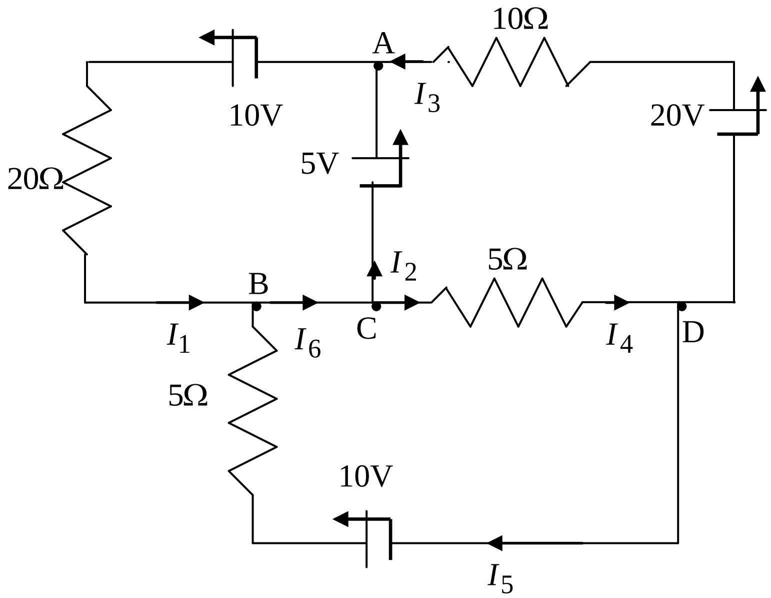
<u>**Exemplul 2. 10**</u>. Să realizeze descompunerea QR a matricei:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.06 & 1 \\ 0.14 & 1 \\ 0.25 & 1 \\ 0.31 & 1 \\ 0.47 & 1 \\ 0.6 & 1 \\ 0.7 & 1 \end{pmatrix}.$$

```
>> A(:,1)=[0 0.06 0.14 0.25 0.31 0.47 0.6 0.7]';
>> A(:,2)=ones(8,1);
>> [Q,R]=qr(A)

Q =

         0   -0.5882   -0.2504   -0.2809   -0.2975   -0.3418   -0.3778   -0.4054
   -0.0536   -0.5169   -0.3617   -0.1749   -0.0730    0.1988    0.4196    0.5895
   -0.1251   -0.4219    0.8870   -0.0726   -0.0506    0.0082    0.0559    0.0926
   -0.2234   -0.2912   -0.0934    0.9201   -0.0726   -0.0530   -0.0370   -0.0248
   -0.2770   -0.2199   -0.0827   -0.0839    0.9154   -0.0863   -0.0877   -0.0888
   -0.4199   -0.0299   -0.0543   -0.0946   -0.1166    0.8247   -0.2229   -0.2596
   -0.5361    0.1246   -0.0311   -0.1032   -0.1426   -0.2475    0.6672   -0.3984
   -0.6254    0.2434   -0.0133   -0.1099   -0.1626   -0.3031   -0.4173    0.4949


R =

   -1.1192   -2.2605
         0   -1.7001
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0
```

- **linsolve(A,b)**: rezolvă sistemul de ecuaţii liniare $AX = b$, $A \in \Re^{n\times n}$, $b \in \Re^{n\times 1}$, $X \in \Re^{n\times 1}$;
- **[v_1,..,v_n]=solve('eq_1',..,'eq_n')**: rezolvă sistemul format din ecuaţiile $eq_1 = 0, \ldots, eq_n = 0$ și obține soluția **v_1,..,v_n**;

Exemplul 2. 11. Găsiţi curenţii din circuitul următor:



Aplicând legile lui Kirchhoff şi legea lui Ohm obţinem sistemul

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ I_6 = I_1 + I_5 \\ I_2 + I_4 = I_6 \\ I_3 + I_5 = I_4 \\ 10 + 5 = 20 I_1 \\ -5 + 20 = 10 I_3 + 5 I_4 \\ -10 = -5 I_5 - 5 I_4 \end{cases}$$

ale cărui necunoscute sunt $I_1, \ldots, I_6$.

```
>> [I1 I2 I3 I4 I5 I6]=solve('I1=I2+I3','I6=I1+I5','I2+I4=I6','I3+I5=I4',...
'10+5=20*I1','-5+20=10*I3+5*I4','-10=-5*I5-5*I4');
Warning: 7 equations in 6 variables.
>> I=eval([I1 I2 I3 I4 I5 I6])

I =

    0.7500   -0.0500    0.8000    1.4000    0.6000    1.3500
```

- **fsolve(F,I)**: rezolvă sisteme de ecuaţii neliniare conţinute în funcţia vectorială **F**, considerând **I** ca punct iniţial (vector de start).
  găseşte toate rădăcinile unei ecuaţii transcendente conţinută în funcţia **F**, ce se află în intervalul **I**;

<u>Observaţia 2. 6</u>.

(i) Toate ecuaţiile care nu sunt algebrice se numesc transcendente (neliniare), deci acele ecuaţii care nu pot fi reduse la ecuaţii algebrice folosind operaţiile: adunare, scădere, înmulţire, împărţire, ridicare la putere.

(ii) Ecuaţiile transcendente importante sunt: ecuaţiile exponenţiale, ecuaţiile logaritmice şi ecuaţiile trigonometrice.

(iii) Spre deosebire de ecuațiile algebrice pentru care se pot obține forme generale ale soluțiilor, pentru ecuațiile transcendente nu mai este posibil acest lucru.

(iv) Deși nu există metode matematice generale de rezolvare pentru aceste ecuații, ele pot fi rezolvate:

A) grafic (vezi secțiunea 3.)

B) prin metode de aproximare.

Exemplul 2. 12. Rezolvaţi ecuaţia transcendentă:

a) $x-0.2=\ln(1+x)$

```
>> f=@ (x) x-0.2-log(1+x);
>> s=fsolve(f,[-0.6,0.6])

  s =

     -0.5068     0.7722

>> f(s)

ans =

  1.0e-006 *

    0.4814    0.0009
```

b) $xe^{x}-1=0$

```
>> f=@ (x) x.*exp(x)-1;
>> format long
>> s=fsolve(f,[-0.7,0.7])
s =

   0.567143290642975   0.567143290409784

>> f(s)

ans =

  1.0e-009 *

   0.644359232637726   0.000000222044605
```

- **fzero(f,I)**: găseşte o rădăcină a unei ecuaţiei transcendente conţinută în funcţia **f**, ce se află în intervalul **I**;

Exemplul 2. 13. Rezolvaţi sistemul neliniar:

a) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ xyz=1 \\ x+y-z^2=0 \end{cases}$ (considerând ca punct iniţial $(2.5, 0.2, 1.6)$).

```
>> f=@(x) [x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2-9;x(1)*x(2)*x(3)-1;x(1)+x(2)-x(3)^2];
>> s = fsolve(f,[2.5 0.2 1.6])

 s =

    2.491375696830717   0.242745878757424   1.653517939300528

>> f(s)

ans =

  1.0e-011 *

   0.112265752250096
   0.134936506412942
  -0.052446935683292
```

Deoarece atât în științe cât și în inginerie se pot întâlni în multe situații, probleme pentru care nu pot fi obținute soluții analitice este necesară aplicarea unor metode de integrare și derivare numerică în vederea rezolvării unor astfel de probleme.

Matlab 7.9 dispune de funcții specializate pentru derivarea și integrarea numerică:

- **int(f,a,b)**: calculează $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$;

Exemplul 2. 14. Calculaţi lungimea arcului de curbă:

a) $y = \ln \sin x,\ x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

Utilizând formula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}\,x,\ \ f:[a,b] \to \Re$$

rezultă că

$$L = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\ln(\sin x))\right)^2}\ \mathrm{d}\,x$$

ce poate fi calculată în Matlab 7.9 astfel:

```
>> syms x
>> L=vpa(int(sqrt(1+diff(log(sin(x)))^2),pi/3,pi/2),5)
Warning: Explicit integral could not be found.

L =

0.54931
```

b) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t,\ t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ z = 4t \end{cases}$

Pentru o curbă în spaţiu dată parametric

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ t \in [a,b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

lungimea arcului de curbă este

$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Secvenţa de comenzi Matlab 7.9 necesare calculului lungimii arcului de curbă este următoarea:

```
>> syms t
>> x=diff(3*cos(t));y=diff(3*sin(t));z=diff(4*t);
>> L=int(sqrt(x^2+y^2+z^2),0,pi/2)

L =

(5*pi)/2
```

c) $\rho = \sin^3\dfrac{\theta}{3},\ \rho \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Pentru o curbă plană dată în coordonate polare: $\rho = \rho(\theta),\ \rho \in [a,b]$, lungimea arcului de curbă este

$$L = \int_a^b \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Secvenţa de comenzi Matlab 7.9, ce ne permite să calculăm lungimea acestui arc de curbă plană este:

```
>> syms t
>> ro=sin(t/3)^3;
>> L=eval(int(sqrt(ro^2+diff(ro)^2),0,pi/2))

L =

   0.135879110559119
```

Exemplul 2. 15. Calculaţi aria marginită de curbele $f(x)=\ln x$, $g(x)=\ln^2 x$, reprezentate în figura Fig 2.1.

Aria mărginită de două curbe care se intersectează în punctele (x_1, y_1) şi (x_2, y_2) se calculează folosind formula:

$$\mathrm{A} = \int_{x_1}^{x_2} \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}\,x\,.$$

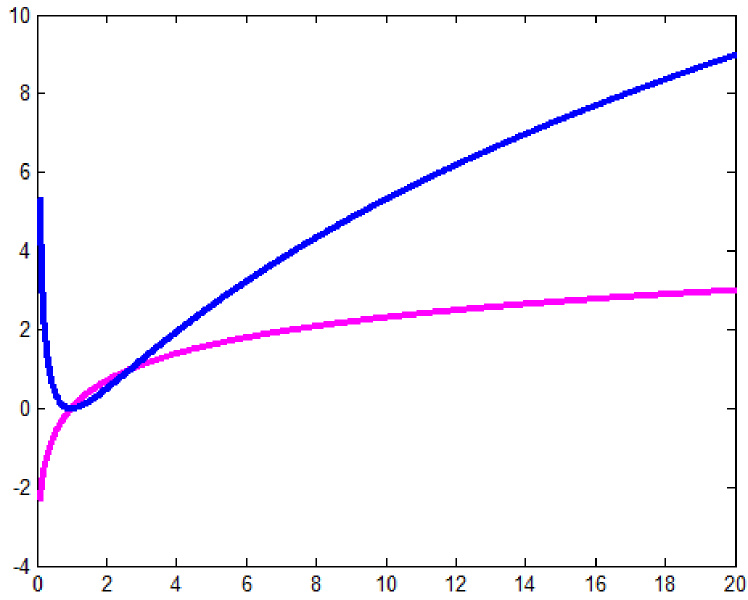


Fig. 2.1. Reprezentarea grafică a celor două funcții.

```
>> syms x
>> f=@(x) log(x);
>> g=@(x) log(x)^2;
>> syms y
>> u=solve(log(y)-log(y)^2,y)

u =

      1
 exp(1)

>> A=eval(int(f(y)-g(y),y,u(1),u(2)))

A =

   0.281718171540954
```

Exemplul 2. 16. Să calculeze lucrul mecanic efectuat de forța

$$\vec{F}(x,y)=\left(x^2-2xy\right)\vec{i}+\left(2xy+y^2\right)\vec{j}$$

de-a lungul arcului de parabolă $AB: y=x^2$, ce unește punctele $A(1,1)$ și $B(2,4)$ din Fig 2.2.

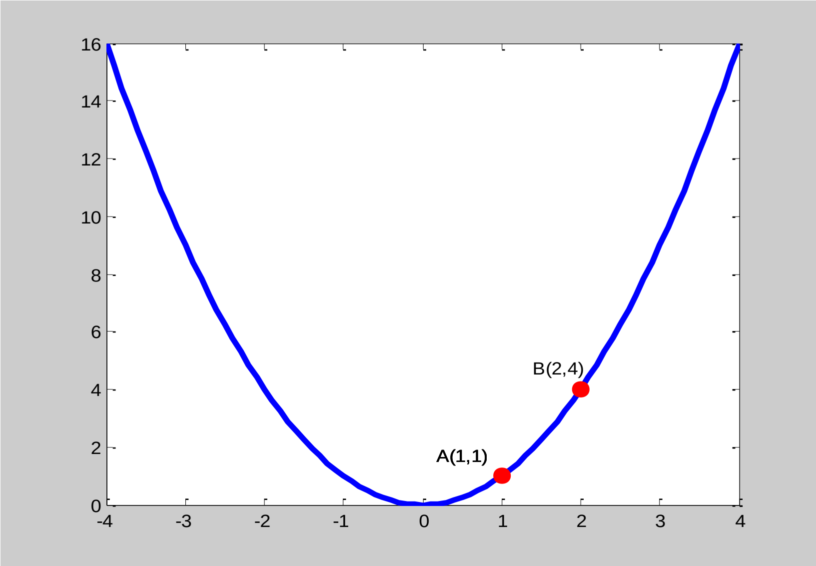


Fig. 2.2. Reprezentarea grafică a arcului de parabolă.

Lucrul mecanic efectuat de un corp în miscare, care se deplasează de-a lungul arcului $AB,$ sub acțiunea unei forțe variabile

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

este

$$L=\int\limits_{AB}P(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}\,y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}\,z\,.$$

Cand arcul AB este de forma

$$(AB):\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t),\ t\in[a,b]\\ z=z(t)\end{cases}$$

atunci

$$L=\int\limits_a^b\left[P(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))\cdot y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))\cdot z'(t)\right]\mathrm{d}\,t\,.$$

Exemplul 2. 17. Se consideră domeniul plan

$$F=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\sin x\}.$$

Să se determine coordonatele centrului de greutate al unei plăci omogene, ce are forma lui F .

Coordonatele centrului de greutate $G(x_G, y_G)$ al unei plăci omogene de forma unui domeniu plan $F = \{(x, y) \mid a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$ se determină conform formulelor:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}\,x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x} \\ y_G = \dfrac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x}. \end{cases}$$

```
>> syms x
>> I1=int(x*sin(x),0,pi);
>> I2=int(sin(x),0,pi);
>> I3=int(sin(x)^2,0,pi)/2;
>> xg=I1/I2

xg =

pi/2

>>  yg=I3/I2

yg =

pi/8
```

- **quad(f,a,b)**: calculează valoarea aproximativă a integralei $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$, obținută prin cvadraturi;
- **dblquad(f,a,b,c,d)**: calculează prin cvadraturi, valoarea aproximativă a integralei $\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$;

<u>Exemplul 2. 18.</u> Calculaţi următoarele integrale duble:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos y}{1+\sin x \sin y}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$

```
>>  syms x y
>> f=@(x,y) cos(y)./(1+sin(x)*sin(y));
>> dblquad(f,0,pi/2,0,pi/2)

ans =

   1.233700562701055
```

b) $\int_{1}^{2}\int_{1}^{2}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

```
>> syms x y
>> f=@(x,y) sqrt(x./(y.^3));
>> dblquad(f,1,2,1,2)

ans =

   0.714045212942350
```

sau

```
>> syms x y
>> eval(int(int(1/sqrt(y^3),1,2)*sqrt(x),1,2))

ans =

   0.714045207910317
```

- **triplequad(f,a,b,c,d,e,f)**: alculează valoarea aproximativă a integralei $\int_{a}^{b}\int_{c}^{d}\int_{e}^{f} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$;

Observaţia 2. 7. Derivarea numerică presupune utilizarea funcțiilor simbolice **diff** și **subs**; de aceea va fi tratată în secțiunea 2.3.

2.3. Calcul simbolic în Matlab

Variabilele utilizate în calcule simbolice se declară prin comada “scurtă” *syms*:

Forma Matlab 7.9	**Semnificaţie**
syms var1 var2…	var1 = sym('var1'); var2 = sym('var2'); ...

syms var1 var2 ... real	var1 = sym('var1,'real');
	var2 = sym('var2','real'); ...
syms var1 var2 ... positive	var1 = sym('var1,'positive');
	var2 = sym('var2','positive'); ...

Exemplul 2. 19. Determinaţi polinomul caracteristic al matricei

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{pmatrix}.$$

```
>> A=[16 2 3 13;5 11 10 8;9 7 6 12;4 14 15 1];
>> syms t
>> P=poly(A,t)

P =

t^4 - 34*t^3 - 80*t^2 + 2720*t
```

Pentru a reprezenta un polinom sub formă simbolică în MATLAB se procedează astfel:

a) se declară variabila simbolică, ce constituie nedeterminata polinomului;
b) se scrie expresia simbolică asociată funcţiei polinomiale.

Exemplul 2. 20. Reprezentaţi sub formă simbolică polinomul:

$$P(s) = s^6 - s^3 + s^2 + 9s + 2.$$

```
>> syms s
>> P=s^6-s^3+s^2+9*s+2

P =

s^6 - s^3 + s^2 + 9*s + 2
```

Funcţiile utilizate în vederea efectuării calculelor simbolice algebrice în Matlab 7.9 sunt:

- **det(A)**: calculează determinantul simbolic al matricei **A**;
- **inv(A):** calculează inversa simbolică a matricei **A**;
- **rank(A)**: determină rangul matricei simbolice **A**;
- **transpose(A)**: determină transpusa simbolică a matricei **A**;
- **simplify(E)**: simplifică simbolic o expresie sau matrice **E**;

Exemplul 2. 21. Calculaţi determinantul, transpusa şi inversa simbolică pentru matricea:

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

```
>> syms x
>> A=[cos(x) -sin(x);sin(x) cos(x)];
>> simplify(det(A))

ans =

1

>> transpose(A)

ans =

[  cos(x), sin(x)]
[ -sin(x), cos(x)]

>> inv(A)

ans =

[  cos(x), sin(x)]
[ -sin(x), cos(x)]
```

Exemplul 2. 22. Simplificaţi expresia:

$$E = \frac{3^{n+2} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+1}}{3^{n+1} \cdot 5^n + 2 \cdot 3^{n+1} \cdot 5^n}.$$

```
>> syms n
>> E=(3^(n+2)*5^n+3^n*5^(n+1))/(3^(n+1)*5^n+2*3^(n+1)*5^n);
>> simplify(E)

ans =

14/9
```

- **simple(A)**: determină cea mai simplă formă a unei expresii sau matrice simbolice;

Exemplul 2. 23. Scrieţi sub o formă simplificată matricea:

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2 x + \sin^2 x & x^2/x \\ 2\sin x \cos x & e^{\ln x^2} \end{pmatrix}.$$

```
>> syms x
>> A=[cos(x)^2+sin(x)^2   x^2/x; 2*sin(x)*cos(x)  exp(log(x^2))];
>> u=simple(A)

u =

[        1,    x]
[ sin(2*x), x^2]
```

- **expm(A)**: returnează matricea exponenţială a lui **A**; din punct de vedere algebric, această matrice poate fi calculată după ce se realizează diagonalizarea lui **A**.

Exemplul 2. 24. Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculaţi e^{At}.

```
>> A=[-3 -1 -1; 0 -3 -1; 1 2 0];
>> syms t
>> simplify(expm(A*t))

ans =

[        -(t - 1)/exp(2*t),                    -t/exp(2*t),                  -t/exp(2*t)]
[        -t^2/(2*exp(2*t)), -(t^2 + 2*t - 2)/(2*exp(2*t)),    -(t*(t + 2))/(2*exp(2*t))]
[ (t*(t + 2))/(2*exp(2*t)),       (t*(t + 4))/(2*exp(2*t)), (t^2 + 4*t + 2)/(2*exp(2*t))]
```

- **logm(A)**: constituie inversa funcţiei **expm(A)**, adică returnează matricea logaritmică a lui **A**; .
- **[N,D]=numden(E)** returnează numărătorul **N** şi respectiv numitorul **D** unei expresii simbolice;
- **factor(E)**: factorizează expresia **E**;

Exemplul 2. 25. Să se factorizeze expresia

$$E = x^3 + yx^2 - 2\sqrt{3}x^2 y - 2\sqrt{3}xy^2 + 3y^2 x + 3y^3.$$

```
>> syms x y
>> E=x^3+y*x^2-2*sqrt(3)*x^2*y-2*sqrt(3)*x*y^2+3*y^2*x+3*y^3;
>> factor(E)

ans =

(x + y)*(x - 3^(1/2)*y)^2
```

- **expand(E)**: realizează expandarea expresiei **E**;

Exemplul 2. 26. Expandaţi expresia:

$$E=\left(x^2\sqrt{2}-x\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(x^2\sqrt{2}+x\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)-\left(x^2\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2.$$

```
>> syms x
>> E=(x^2*sqrt(2)-x*sqrt(3)+sqrt(5))*(x^2*sqrt(2)+x*sqrt(3)+sqrt(5))-(x^2*sqrt(2)+sqrt(5))^2;
>> expand(E)

ans =

(-3)*x^2
```

- **collect(P,x)**: colectează termenii asemenea din expresia simbolică **P** în raport cu variabilele precizate în vectorul **x**;

Exemplul 2. 27. Să se grupeze termenii asemenea prezenţi în partea reală a expresiei simbolice complexă

$$f=\left(a_1+ia_2\right)\left(x+iy\right)+\left(b_1+ib_2\right)\left(x-iy\right),\ (\forall)\,a_i,\,b_i,\,x,y\in\Re,\ i=\overline{1,2}.$$

```
>> syms a1 a2 b1 b2 x y real
>> f= (a1 + i*a2)*(x + i*y) + (b1 + i*b2)*conj(x + i*y);
>> f1 = collect(real(f), [x, y])

f1 =

(a1 + b1)*x + (b2 - a2)*y
```

- **coeffs(P,x)**: determină coeficienţii polinomului **P** în raport cu nedeterminata **x**;
- **subs(S,new)** înlocuieşte variabila liberă din expresia **S** cu **new**;
- **subs(*S*,old,new)** înlocuieşte variabila simbolică **old** din expresia **S** cu variabila numerică sau simbolică **new**;
- **subs(*S*,{$\mathbf{x_1,..,x_n}$},{$\mathbf{y_1,..,y_n}$})** înlocuieşte variabilele simbolice $\mathbf{x_1,..,x_n}$ din expresia **S** cu variabilele numerice sau simbolice $\mathbf{y_1,..,y_n}$;

Exemplul 2. 28. Fie $p_1(x)=x+a$, $p_2(x)=x^2+bx+c$. Calculaţi determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & p_1(x_1) & p_2(x_1) \\ 1 & p_1(x_2) & p_2(x_2) \\ 1 & p_1(x_3) & p_2(x_3) \end{vmatrix}$$

scriind rezultatul sub formă de produs.

```
>> syms x a b c x1 x2 x3
>> p1=x+a;
>> p2=x^2+b*x+c;
>> A=[1 subs(p1,x,x1) subs(p2,x,x1); 1 subs(p1,x,x2) subs(p2,x,x2);...
1 subs(p1,x,x3) subs(p2,x,x3)]

A =

[ 1, a + x1, x1^2 + b*x1 + c]
[ 1, a + x2, x2^2 + b*x2 + c]
[ 1, a + x3, x3^2 + b*x3 + c]

>> factor(det(A))

ans =

-(x2 - x3)*(x1 - x3)*(x1 - x2)
```

- **solve(eq):** rezolvă ecuaţia $eq = 0$ în raport cu variabila din expresia eq;
- **solve(eq,var):** rezolvă ecuaţia $eq = 0$ în raport cu variabila var din expresia eq;
- **solve(eq$_1$,..,eq$_n$,var$_1$,..,var$_n$):** Rezolvă sistemul format din ecuaţiile $eq_1 = 0, \ldots, eq_n = 0$ în raport cu variabilele **var$_1$,..,var$_n$**;

<u>Exemplul 2. 29</u>. Rezolvaţi ecuaţia

$$x^2 - 2(m+2)x + m^2 - 1 = 0$$

în raport cu variabila x.

```
>> syms x m
>> x=solve('x^2-2*(m+2)*x+m^2-1',x)

x =

 m + (4*m + 5)^(1/2) + 2
 m - (4*m + 5)^(1/2) + 2
```

Exemplul 2. 30. Rezolvaţi sistemul de ecuaţii următor în raport cu x, y, z:

$$\begin{cases} 3x+4y+mz=0 \\ 4x+my+3z=6 \\ mx+3y+4z=3+m \end{cases}, m \in \Re .$$

```
>> syms x y z m
>> [x,y,z]=solve('3*x+4*y+m*z','4*x+m*y+3*z-6','m*x+3*y+4*z-3-m',x,y,z)

x =

(m^3 + 3*m^2 - 30*m + 60)/(m^3 - 36*m + 91)


y =

-(- 2*m^2 + 3*m + 45)/(m^3 - 36*m + 91)


z =

-(3*m^2 + 17*m - 102)/(m^3 - 36*m + 91)
```

Exemplul 2. 31. Determinaţi matricea A astfel încât:

$$\left(2A-3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix}\right)^T = 3A^T + \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix}^T .$$

Pasul 1. Considerăm matricea simbolică $A=\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}$.

```
>> syms a b c
>> A=[a b c];
```

Pasul 2. Calculăm $X=\left(2A-3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix}\right)^T - 3A^T - \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix}^T$.

```
>> X=transpose(2*A-3*[1 2 0])-3*transpose(A)-transpose([2 1 -1])

X =

 - a - 5
 - b - 7
   1 - c
```

Pasul 3. Determinăm a,b,c astfel încât $X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

```
>> [a b c]=solve(X(1),X(2),X(3))

a =

-5


b =

-7


c =

1
```

- **symsum(s,v,a,b)**: calculează simbolic $\sum_{v=a}^{b} s$

Exemplul 2. 32. Calculaţi

$$s = n - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 + 3k + 1}{k^2 + 3k + 2}.$$

```
>> syms k n
>> s=(k^2+3*k+1)/(k^2+3*k+2);
>> simple(n-symsum(s,k,1,n));
```

Matlab 7.9 va afişa:

$$s = \frac{n}{2n + 4}.$$

Exemplul 2. 33. Calculaţi suma seriei:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)!}$$

```
>> syms n
>> symsum((n^2+n-1)/'(n+1)!',n,1,inf)

ans =

2
```

Funcţia **symsum** din MATLAB poate fi utilizată pentru a determina raza de convergenţă a unei serii de puteri $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, care poate fi calculată folosind una din formulele:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{2.1}$$

sau

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}. \tag{2.2}$$

Exemplul 2. 34. Să se determine raza de convergenţă pentru seria de puteri:

a) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+n} x^n$;

```
>> syms n
>> an=(1+1/n)^(n^2+n);
>> 1/limit(sqrt(abs(an)),inf)

ans =

0
```

b) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{2^n+3^n}$.

```
>> syms n
>> an=1/(2^n+3^n);
>> 1/limit(abs(subs(an,n+1)/an),inf)

ans =

3
```

- **limit(f,x,a)**: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

Exemplul 2. 35. Calculaţi următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\sqrt[3]{\cos x} - \cos x\sqrt[3]{\sin x}}{\ln(\mathrm{tg}\, x - \cos 2x)}$

```
>> syms x
>> f=(sin(x)*cos(x)^(1/3)-cos(x)*sin(x)^(1/3))/(log(tan(x)-cos(2*x)));
>> eval(limit(f,x,pi/4))

ans =

    0.2100
```

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)$

```
>> syms n
>> limit('((n+1)!)^(1/n+1)-(n!)^(1/n)',n,inf)

ans =

Inf
```

- **limit(f,x,a,'right')**: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x);$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{\mathrm{tg}^2\,x}$

```
>> syms x
>> f=(x*exp(-1/x))/tan(x)^2;
>> limit(f,x,0,'right')

ans =

0
```

- **limit(f,x,a,'left')**: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x);$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}$

```
>> syms x
>> f=abs(x)/x;
>> limit(f,x,0,'left')

ans =

-1
```

Observaţia 2. 8. Problema limitei

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$$

pentru funcţiia de mai multe variabile $f(x,y)$ poate fi rezolvată folosind succesiv, funcţia **limit**, astfel:

limit(limit(f,x,a),y,b)

limit(limit(f,y,b),x,a).

Exemplul 2. 36. Calculaţi limita:

$$\lim_{\substack{x\to 1/\sqrt{y}\\ y\to\infty}} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \left(1+\frac{1}{y^2}\right)^{x+a^2 y^2}.$$

```
>> syms x y a
>> f=exp(-1/(x^2+y^2))*sin(x)^2/x^2*(1+1/y^2)^(x+a^2*y^2);
>> limit(limit(f,x,1/sqrt(y)),y,inf)

ans =

exp(a^2)
```

- **diff(f)**: $f'(x)$
- **diff(f,'x')**: $f'(x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x};$$

Exemplul 2. 37. Să se calculeze $f'(x)$ dacă

$$f(x)=\frac{\cos x}{x^2+x+3}.$$

```
>> syms x
>> f=cos(x)/(x^2+x+3);
>> simplify(diff(f,'x'))

ans =

- sin(x)/(x^2 + x + 3) - (cos(x)*(2*x + 1))/(x^2 + x + 3)^2
```

sau

```
>> syms x
>> f=@(x) cos(x)/(x^2+x+3);
>> simplify(diff(f(x)))

ans =

- sin(x)/(x^2 + x + 3) - (cos(x)*(2*x + 1))/(x^2 + x + 3)^2
```

- **diff(f,n)**: $f^{(n)}(x)$;
- **diff(f,'x',n)**: $f^{(n)}(x)$

  $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$;
- **latex(E)**: afişează o expresia **E** în format *Latex*;

<u>Exemplul 2. 38.</u> Să se calculeze $f''(x)$ dacă

$$f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - \ln\left(1 + x^2\right)$$

şi să se afişeze rezultatul în format *Latex*.

```
>> syms x
>> f=x*atan(x)-log(1+x^2);
>> diff(f,2)

ans =

(2*x^2)/(x^2 + 1)^2

>> latex(diff(f,2))

ans =

\frac{2\, x^2}{{\left(x^2 + 1\right)}^2}
```

<u>Exemplul 2. 39.</u> Calculaţi $f^{(4)}(2)$ dacă:

$$f(x) = |x|\sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

<u>Exemplul 2. 40</u>. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi şi al doilea pentru funcţia:

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

<u>Pasul 1</u>. Calculăm derivatele parţiale de ordinul întâi al lui f, adică $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

```
>> syms x y
>> f=atan((x+y)/(1-x*y));
>> t=simplify(diff(f,x))

t =

1/(x^2 + 1)

>> u=simplify(diff(f,y))

u =

1/(y^2 + 1)
```

Pasul 2. Calculăm derivatele parţiale de ordinul doi al lui f, adică

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy}.$$

```
>> simplify(diff(f,x,2))

ans =

-(2*x)/(x^2 + 1)^2

>> simplify(diff(f,y,2))

ans =

-(2*y)/(y^2 + 1)^2

>> simplify(diff(t,y))

ans =

0
```

Observaţia 2. 9. Putem calcula $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ şi în modul următor:

```
>> simplify(diff(t,x))

ans =

-(2*x)/(x^2 + 1)^2

>> simplify(diff(u,y))

ans =

-(2*y)/(y^2 + 1)^2
```

<u>Exemplul 2. 41</u>. Calculaţi derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei următoare în punctul indicat:

$$f(x,y) = 2x^3y - e^{x^2},\ (-1,1).$$

```
>> syms x y
>> f=2*x^3*y-exp(x^2);
>> s=diff(f,x); t=diff(f,y);
>> [subs(s,{x,y},{-1,1}) subs(t,{x,y},{-1,1})]

ans =

  11.436563656918091  -2.000000000000000

>> u=diff(s,x); v=diff(t,y);w=diff(s,y);
>> [subs(u,{x,y},{-1,1}) subs(v,{x,y},{-1,1}) subs(w,{x,y},{-1,1})]

ans =

 -28.309690970754271                    0    6.000000000000000
```

- **int(f)**: $\int f(x)\,\mathrm{d}x;$

<u>Exemplul 2. 42</u>. Calculaţi:

$$\int \frac{x + \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

```
>> syms x
>> f=(x+(x+1)^(1/4))/sqrt(x+1);
>> int(f)

ans =

(2*(x + 1)^(1/2)*(x + 2*(x + 1)^(1/4) - 2))/3
```

- **int(f,x)**: determină o primitivă a lui **f**, în raport cu **x**;

Exemplul 2. 43. Calculaţi:

$$\int x^3 \cos^2 ax \,\mathrm{d}\, x.$$

```
>> syms a x
>> factor(int(x^3*cos(a*x)^2,x));
```

- **jacobian(F,v)**: determină matricea Jacobiană ataşată funcţiei vectoriale **F**, în raport cu vectorul **v**. Atunci când **F** este o funcţie scalară, funcţia *jacobian* returnează gradientul lui **F**;

Observaţia 2. 10. Determinantul funcţional (jacobianul) al funcţiilor f_1, f_2, f_3 în raport cu variabilele ρ, θ, φ se calculează conform formulei:

$$\frac{\mathrm{D}(f_1, f_2, f_3)}{\mathrm{D}(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \rho} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} \end{vmatrix}. \tag{2.3}$$

Exemplul 2. 44. Fie

$$F : D \to \Re^2,\ D \subset [0,\infty) \times \Re,\ F(\rho,\theta) = (f_1(\rho,\theta), f_2(\rho,\theta),) = (a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta).$$

Calculaţi determinantul funcţional (jacobianul) al funcţiilor f_1, f_2, adică $\frac{\mathrm{D}(f_1, f_2)}{\mathrm{D}(\rho,\theta)}$.

```
>> syms rho th a b
>> x=a*rho*cos(th); y=b*rho*sin(th);
>> F=[x y]; v=[rho th];
>> J=jacobian(F,v)

J =

[ a*cos(th), -a*rho*sin(th)]
[ b*sin(th),  b*rho*cos(th)]

>> simplify(det(J))

ans =

a*b*rho
```

Exemplul 2. 45. Fie $F : D \to \Re^3$, $D \subset [0,\infty) \times \Re^2$,

$$F(\rho,\theta,\varphi) = (f_1(\rho,\theta,\varphi), f_2(\rho,\theta,\varphi), f_3(\rho,\theta,\varphi)) = (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta).$$

Calculaţi determinantul funcţional (jacobianul) al funcţiilor f_1, f_2, f_3, adică $\dfrac{\mathrm{D}(f_1, f_2, f_3)}{\mathrm{D}(\rho,\theta,\varphi)}$.

```
>> syms rho th phi
>> F=[rho*sin(th)*cos(phi) rho*sin(th)*sin(phi) rho*cos(th)];
>> v=[rho th phi];
>> J=jacobian(F,v);
>> simplify(det(J))

ans =

rho^2*sin(th)
```

Exemplul 2. 46. Să se determine matricea Jacobiană

$$J_f(-1,0,-1)$$

ataşată funcţiei vectoriale

$$f : \Re^3 \to \Re^3,\ f(x,y,z) = \left((x+y+z)^2, 2x+y-2z, 3x^2+2xy-12xz-18zy\right).$$

Observaţia 2. 11. Pentru o functie vectoriala $f : \Re^3 \to \Re^3$

$$f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)),$$

unde $f_i : \Re^3 \to \Re, (\forall) i = \overline{1,3}$, matricea Jacobiană ataşată funcţiei vectoriale f în punctul $a \in \Re^3$ este matricea

$$\mathrm{J}_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(a) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial f_3}{\partial y}(a) & \dfrac{\partial f_3}{\partial z}(a) \end{pmatrix}.$$

```
>> syms x y z
>> u=[x y z];
>> f=[(x+y+z)^2 2*x+y-2*z 3*x^2+2*x*y-12*x*z-18*z*y];
>> J=jacobian(f,u)

J =

[  2*x + 2*y + 2*z, 2*x + 2*y + 2*z, 2*x + 2*y + 2*z]
[                2,               1,              -2]
[ 6*x + 2*y - 12*z,      2*x - 18*z,    - 12*x - 18*y]

>> v=[-1 0 -1];
>> subs(J,u,v)

ans =

    -4    -4    -4
     2     1    -2
     6    16    12
```

Aşadar,

$$J_f(-1,0,-1)=\begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 6 & 16 & 12 \end{pmatrix}.$$

- **taylor(f,x,n)**: scrie primii **n** termeni din dezvoltarea în serie MacLaurin de ordinul **n**-1 a funcţiei **f**;

Exemplul 2. 47. Scrieţi primii opt termeni din dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei

$$f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x^2+1}.$$

```
>> syms x
>> f=(x^2+2*x+2)/(x^2+1);
>> taylor(f,x,8)

ans =

- 2*x^7 - x^6 + 2*x^5 + x^4 - 2*x^3 - x^2 + 2*x + 2
```

- **taylor(f,x,n,a)**: scrie primii **n** termeni din dezvoltarea în serie Taylor de ordinul **n**-1 a funcţiei **f** în jurul punctului **x**=**a**;

Exemplul 2. 48. Scrieţi dezvoltarea în serie Taylor de ordinul cinci a funcţiei

$$f(x)=\cos^3 x,$$

în jurul punctului $x = \pi$.

```
>> syms x
>> f=cos(x)^3;
>> taylor(f,x,6,pi)

ans =

(3*(pi - x)^2)/2 - (7*(pi - x)^4)/8 - 1
```

Observaţia 2. 12. Matlab 7.9 nu are funcţie specializată pentru dezvoltarea în serie Taylor a funcţiilor de mai multe variabile; cu toate acestea, în Matlab 7.9 se poate importa din MUPAD sau MAPLE funcţia **mtalyor**, care permite dezvoltarea în serie Taylor a funcţiilor de mai multe variabile şi în MATLAB.

- **feval(f,x₁,..,xₙ)**: evaluează funcţia **f** în punctul (**x₁,..,xₙ**);
- **symengine** deschide o fereastră de dialog, în care se alege software-ul MUPAD sau MAPLE, din care se importă o anumită funcţie;

```
>> symengine
```

Exemplul 2. 49. Să se dezvolte în serie MacLaurin de ordinul patru, funcţia

$$f(x,y) = \left(x^2 - 2x\right)e^{-x^2 - y^2 - xy}.$$

```
>> feval(symengine,'mtaylor','(x^2-2*x)*exp(-x^2-y^2-x*y)', '[x, y]', 4)

ans =

- x^4 - x^3*y + 2*x^3 - x^2*y^2 + 2*x^2*y + x^2 + 2*x*y^2 - 2*x
```

Exemplul 2. 50. Să se dezvolte în serie Taylor de ordinul şase, în jurul punctului $(2,1)$, funcţia:

$$f(x) = \sin\left(x^2 + y^2\right)$$

```
>> feval(symengine,'mtaylor','sin(x^2+y^2)', '[x, y]', 6,'[2,1]')

ans =

x^2 - y^6/6 + y^2
```

2.4. Aplicaţii propuse

1. Să se determine forma canonică Jordan asociată matricei:

$$A=\begin{pmatrix} -71 & -65 & -81 & -46 \\ 75 & 89 & 117 & 50 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ -67 & -121 & -173 & -58 \end{pmatrix}.$$

2. Rezolvaţi următoarele ecuaţii transcendente:

   a) $1+x=\operatorname{arctg} x$ (căutaţi soluţia în intervalul $[-3,\ 3]$);

   b) $x^2-\cos \pi x=0$ (căutaţi soluţia în intervalul $[-0.5,\ 0.5]$).

3. Rezolvaţi sistemele neliniare:

   a) $\begin{cases} x-\sin(x+y)=0 \\ y-\cos(x-y)=0 \end{cases}$ (considerând ca punct iniţial $(0,1)$)

   b) $\begin{cases} y^3-20x-1=0 \\ x^3+xy-10y+10=0 \end{cases}$ (considerând ca punct iniţial $(0.5,0.3)$)

   c) $\begin{cases} x_1+3\lg x_1-x_2^2=0 \\ 2x_1^2-x_1x_2-5x_1+1=0 \end{cases}$ (considerând ca punct iniţial $(3,2)$)

   d) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=0 \\ 2x^2+y^2-4z=0 \\ 3x^2-4y+z^2=0 \end{cases}$ (considerând ca punct iniţial $(0.5,0.5,0.5)$)

   e) $\begin{cases} x^3+y^3-6x+3=0 \\ x^3-y^3-6y+2=0 \end{cases}$ (considerând ca punct iniţial $(0.5,0.5)$)

4. Calculaţi derivatele de mai jos, în punctele indicate:

   a) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$, $f'(3)=?$

b) $f(x)=\arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$, $f''(5.7)=?$

c) $f(x)=2^{x^2-2x}$, $f^{(3)}(-0.2)=?$

5. Calculaţi derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiilor următoare în punctele indicate:

a) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$, $(-2,2)$

b) $f(x,y)=x\sin(x+y)$, $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$

c) $f(x,y,z)=x\mathrm{e}^{yz}$, $(1,1,1)$

6. Determinaţi vectorii şi valorile proprii corespunzători matricei:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

7. Determinaţi cele mai mari trei valori proprii (in modul) şi vectorii proprii coresponzători acestora, ai matricei:

$$A=\begin{pmatrix}3&4&-1.6&0&1\\0&-1&0.5&6&0\\0&0&-7.6&5&8\\6&4&3&20&-1\\8&0&-0.6&3&0\end{pmatrix}.$$

8. Calculaţi următoarele integrale simple:

a) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

c) $\int_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

d) $\int_1^5\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

9. Calculaţi valoarea următoarelor integrale improprii:

a) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\int_3^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}(x+1)}$.

10. Calculaţi următoarele integrale duble:

a) $\int_0^\pi \int_0^\pi y \sin^2 x \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y$

b) $\int_1^3 \int_0^1 \frac{xy}{\sqrt{\left(1+x^2+y^2\right)^3}} \mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y$

11. Fie polinoamele:

$$P(X) = X^4 + 7X^3 + 13X^2 + 19X + 20$$

$$Q(X) = X^7 + 16X^6 + 103X^5 + 346X^4 + 655X^3 + 700X^2 + 393X + 90.$$

Verificaţi dacă cele două polinoame sunt coprime (adică dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1).

12. Se consideră matricea:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Calculaţi:

$$X^2 - 2aX + (a^2 + b^2)\mathrm{I}_2,$$

unde I_2 semnifică matricea unitate de ordinul doi.

13. Fie matricele pătrate

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculaţi

$$(A+B)^{100}.$$

14. Simplificaţi expresiile:

a) $E = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x}$

b) $F = \left(\dfrac{x^2}{x+2} - \dfrac{x^3}{x^2+4x+4}\right) : \left(\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{x^2}{x^2-4}\right)$

c) $G = \dfrac{x^2 + x\sin\frac{\pi}{4} - 3}{x\sin\frac{\pi}{4} - 1}$.

15. Calculaţi suma

$$S_n = 1^3 + 4^3 + 7^3 + \ldots + (3n-2)^3,\ n \in \mathrm{N}.$$

16. Determinaţi rădăcinile polinomului

a) $P(X) = X^4 + X^3 - 10X^2 - 34X - 26$

b) $P(X) = X^5 + 5X + 1$

17. Se consideră polinomul

$$P(x) = (x+3)^2\left(x^2 + 3x + 2\right)\left(x^3 + 12x^2 + 48x + 64\right)$$

a) Determinaţi cea mai simplă formă a polinomului **P**;

b) Dezvoltaţi expresia lui *P*.

18. Descompuneţi în fracţii simple expresia:

a) $\dfrac{1}{x^5 + x + 1}$

b) $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}$

c) $\dfrac{x^3 + x - 1}{x^2 + 3x - 4}$

d) $\dfrac{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 10}{(x-3)(x+1)^2}$.

19. Expandaţi expresia:

a) $x(x-2)^2(x-3)^3$

b) $(p+q)^3 - 3(p+q)^2(p-q) + 3(p+q)(p-q)^2 - (p-q)^3$.

20. Factorizaţi expresia:

a) $E = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z)$

b) $F = (2m-3)(m-1)^2 - 4(2m-3)$.

21. Să se scrie sub forma unui singur polinom produsul a două polinoame:

a) $\left(X^3 + X^2 - 1\right)\left(X^2 - X + 1\right)$

b) $\left(X^2 - \sqrt{2\sqrt{2}}X + \sqrt{2}\right)\left(X^2 + \sqrt{2\sqrt{2}}X + \sqrt{2}\right)$.

22. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$$

scriind rezultatul sub formă de produs.

23. Să se grupeze termenii asemenea din expresia simbolică

$$E = \left(x + \mathrm{e}^x\right)(x+2).$$

24. Să se calculeze determinantul Vandermonde de ordinul patru:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}.$$

25. Înlocuiţi variabila simbolică b din expresia

$$2a^2 + 8b^3a - 3(b-4)$$

cu valoarea 4.

26. Se consideră expresia

$$E(x) = mx + n,\ m, n \in \Re,\ m \neq 0.$$

Calculaţi:

$$E(x-1) + 2E(x+2) - 3E(x+1).$$

27. Rezolvaţi ecuaţia

a) $3x^3 - 2mx + 1 - m = 0$, $m \in \Re$

b) $\dfrac{2^x + a\cdot 3^x}{2^x - a\cdot 3^x} = 2$, $a \in \Re$

în raport cu variabila x.

28. Rezolvaţi sistemul de ecuaţii următor:

a) $\begin{cases} x^2 + ax^2 + 6b + 3y^2 = 0 \\ a + x + 3 = y \end{cases}, a, b \in \Re$

b) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}, a \in \Re$ în raport cu x, y, z:

29. Determinaţi a, b şi c astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x + ay + cz = 0 \\ bx + cy - 3z = 1 \\ ax + 2y + bz = 5 \end{cases}$$

are soluţia $x = 3$, $y = -1$, $z = 2$.

30. Scrieţi polinomul ai căror coeficienţi sunt: 6, 7, 8, 9, 10.

31. Determinaţi matricea A astfel încât:

$$\left(A + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

32. Calculaţi următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{x^3} - 1}{1 - \cos\sqrt{x - \sin x}}$

e) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n + n^2}(\sin 1 + \ldots + \sin n) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n + n^2} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \sin k$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x \sin\dfrac{b}{x}$.

33. Să se calculeze următoarele derivate:

a) $f'(x)$ dacă $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$,

b) $g''(x)$ dacă $g(x)=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) $f(x)=\cos^2\sqrt{x}$; $f'(x)=?$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+6x^2+11x+6}$, $f^{(11)}(x)=?$

23. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi şi al doilea pentru funcţia:

a) $f(x,y)=x^2\sin^2 y$

b) $f(x,y,z)=y^{x^z}$, $x,y>0$

c) $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{xy}\sin z$.

24. Determinaţi câte o primitivă, în fiecare dintre cazurile:

a) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{\left(1+x^{-4}\right)^3}}$

b) $\int\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

c) $\int\ln(1+\mathrm{tg}\,x)\mathrm{d}x$

d) $\int\dfrac{4x^2-7x+25}{x^3-6x^2+3x+10}\mathrm{d}x$

e) $\int x^{-4}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$

f) $\int\dfrac{1}{x^2}\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

g) $\int\dfrac{x^2}{(x\cos x-\sin x)^2}\mathrm{d}x$

h) $\int \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}\,x$

i) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x.$

26. Scrieţi primii şapte termeni din dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ x\in(-1,1).$$

27. Fie $F: D\to\Re^3,\ D\subset[0,\infty)\times\Re^2$,

$$F(\rho,\varphi,z)=\left(f_1(\rho,\varphi,z), f_2(\rho,\varphi,z), f_3(\rho,\varphi,z)\right)=(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z).$$

Calculaţi determinantul funcţional (jacobianul) al funcţiilor $f_1,\ f_2,\ f_3$, adică $\frac{\mathrm{D}(f_1, f_2, f_3)}{\mathrm{D}(\rho,\varphi,z)}$.

28. Calculaţi suma seriei:

a) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{n^2(3^n-2^n)}{6^n}$

b) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)}$

c) $\sum\limits_{n\geq 1}\ln\left[1+\frac{2}{n(n+3)}\right]$

d) $\sum\limits_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

e) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

29. Să se determine raza de convergenţă pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{x^n}{2^n+3^n}$

b) $\sum\limits_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+n}x^n$

c) $\sum\limits_{n\geq 1}n^{\ln^2 n}\cdot x^n$

d) $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\frac{n+1}{n^2+n+1}x^n$.

1.5. Bibliografie

1. G. Anastassiou, **I. Iatan**, *Intelligent Routines: Solving Mathematical Analysis with Matlab, Mathcad, Mathematica and Maple,* Springer, 2013.
2. M. Ghinea, V. Fireţeanu, *Matlab: Calcul numeric- Grafică-Aplicaţii*, ed. Teora, Bucureşti, 1998.
3. **I. Iatan**, *Îndrumător de laborator în Matlab 7.0*, Ed. Conspress, Bucureşti, 2009.
4. **I. Iatan**, F. Enescu, *Rezolvarea unor probleme de matematică aplicată în inginerie cu Matlab,* în curs de publicare.
5. A. Quarteroni, F. Saleri, *Scientific Computing with Matlab and Octave,* Springer, 2006.
6. V. Rovenski, *Modeling of Curves and Surfaces with Matlab,* Springer, 2010.
7. D. Xue, Y.Q. Chen, *Solving Applied Mathematical Problems with Matlab*, Taylor & Francis Group, 2009.