

2014

APLICAȚII DE LABORATOR , ÎN MATHEMATICA ȘI MATHCAD

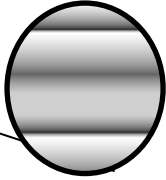
Iuliana Florentina IATAN
Bogdan SEBACHER



CONSPRESS



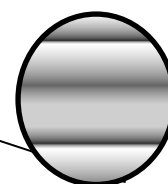
BUCUREȘTI



**Iuliana Florentina IATAN
Bogdan SEBACHER**

APLICAȚII DE LABORATOR ÎN MATHEMATICA ȘI MATHCAD

EDITURA  **CONSPRESS**
2014



Copyright © 2014, Editura Conspress și autorii

EDITURA CONSPRESS
este recunoscută de
Consiliul Național al Cercetării Științifice din Învățământul Superior

Referent științific: prof.univ.dr.mat. Romică TRANDAFIR

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

IATAN, IULIANA FLORENTINA

Aplicații de laborator în Matematică și MathCad / Iuliana Florentina Iatan, Bogdan
Sebacher. – București: Conspress, 2014

Bibliogr.

ISBN 978-973-100-323-8

I. Sebacher, Bogdan

004.4(075.8)

Carte universitară

CONSPRESS

**B-dul Lacul Tei nr.124, sector 2,
cod 020396, București**

Tel.: (021) 242 2719 / 300; Fax: (021) 242 0781



Prefață

Multe calcule științifice necesită evaluarea unor expresii matematice complexe. În acest scop, cercetătorii au utilizat software precum Fortran, Pascal și C, care sunt adecvate pentru calcule numerice. Cu toate acestea, există sisteme de calcul care oferă un mediu integrat pentru calcule simbolice, numerice și grafică precum Mathematica, Maple, Matlab și Mathcad.

Mathematica se distinge de limbajele de programare tradiționale deoarece dispune de o colecție mare de structuri de date sau obiecte (funcții, serii, mulțimi, liste, tablouri, tabele, matrice, vectori, etc.), precum și de operații asupra acestor obiecte (testare, selecție, compunere, etc.). Biblioteca sa poate fi extinsă cu programe și pachete personalizate.

Scopul acestei cărți este de a introduce conceptele fundamentale din Mathematica și Mathcad, atât de utile pentru a rezolva probleme de interes din domeniile Matematică, Informatică, Științe ingineresti pentru studenții și doctoranzii care studiază discipline adiacente acestor domenii.

Aplicații de laborator în Mathematica și Mathcad constituie un manual de utilizare al software-lor Mathematica și Mathcad, destinat atât începătorilor cât și avansaților, datorită diversității aplicațiilor pe care le conține, fiecare dintre acestea fiind explicate pe baza aspectelor teoretice pe care le implică.

Cartea este structurată în șapte capitole, ce constituie lecții de laborator, deoarece ilustrează aplicarea pe calculator în Mathematica și/sau Mathcad a unor noțiuni matematice studiate în cadrul cursurilor de *Analiză matematică*, *Algebră liniară*, *geometrie analitică și diferențială*, *Ecuatii diferențiale și cu derivate parțiale*, *Matematici superioare*, contribuind la aprofundarea acestora.

Fiecare din capitolele cărții este precedat de un breviar teoretic, ce conține concepte esențiale privind utilizarea Mathematica/Mathcad și suportul matematic necesar implementării noțiunilor prezentate și se încheie cu probleme propuse spre rezolvare cu ajutorul acestor software.

Primele două capitole sunt dedicate calculelor numerice și respectiv simbolice în Mathcad și Mathematica, cu evidențierea principalelor aplicații ale acestora în Algebră și respectiv Analiză matematică. Cel de-al treilea și al patrulea capitol sunt dedicate reprezentărilor grafice 2D și respectiv 3D în Mathcad și Mathematica. Capitolul cinci tratează



aspecte privind elementele de analiză vectorială în Mathcad și Mathematica. Capitolul șase se ocupă cu diferențiabilitatea funcțiilor în Mathcad și Mathematica. În cadrul celui de-al șaptelea capitol este ilustrat modul de utilizare al formelor pătratice în Mathcad și Mathematica.

Dorim să mulțumim referentului științific al acestei cărți, domnul profesor dr. mat. Romică Trandafir, care prin profesionalismul dumnealui didactic și de cercetător, dovedit atât în domeniul Matematicii cât și al Informaticii a contribuit la modelarea personalităților noastre.

Autorii

19 februarie 2014



L1. Lecția de Laborator 1. Calcule numerice în Mathcad și Mathematica

L1.1. Breviar teoretic

Mathcad-ul este produs de compania MathSoft în 1986 și constituie un pachet de programe dedicat efectuării de calcule matematice cu aplicabilitate mai ales în tehnică.

Mathematica este cel mai puternic sistem de calcul, la nivel mondial. Lansat în 1988 (creatorul acestui soft este Stephen Wolfram), aceasta a avut un efect profund asupra modului de utilizare a calculatoarelor atât în domeniile tehnice (Științe ingineresti, Informatică, Matematică, Fizică, Biologie) cât și în alte domenii (Economie, Științe sociale). Printre cei peste 1.000.000 de utilizatori de Mathematica, 28% sunt ingineri, 21% sunt informaticieni, 20% sunt fizicieni, 12% sunt matematicieni, 12% sunt oameni de afaceri, sociologi, etc., 7% sunt utilizatori din industrie.

Cu ajutorul lor:

- se poate calcula orice formulă matematică
- se pot reprezenta grafice de funcții
- se poate programa
- se pot rezolva ecuații și sisteme
- se poate face calcul simbolic (cu aplicații în algebră, analiză)
- se poate face calcul numeric (cu aplicații în algebră, analiză).

L1.1.1. Introducere în Mathcad

Mathcad-ul are “cărți electronice” care pot fi consultate ori de câte ori avem nevoie de informații din domenii ca: matematică, fizică, mecanică, chimie. Odată cu lansarea în execuție a acestui program se deschide și o fereastră *Resource Center*, care ne permite accesul la informațiile respective.



Editarea unui document Mathcad este similară cu editarea unui document Word. Inserarea unei regiuni text într-un document Mathcad se realizează selectând: *Insert* → *TextRegion* iar formatarea acesteia necesită utilizarea butoanelor de acțiune rapidă din bara *Formatting*:



Introducerea cursorului într-o regiune Math este posibilă alegând *Insert* → *Math Region*; dacă cursorul se află în această regiune pe o variabilă, atunci în fereastra *Style* se va afișa cuvântul *Variables*:

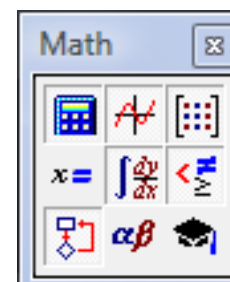


Zona de lucru care cuprinde documentul Mathcad este constituită din regiuni (zone dreptunghiulare). În zonele de calcul, MathCAD-ul face distincție între literele mari și cele mici.

În dreapta ecranului se găsesc paletele *Math*.

Acestea sunt:

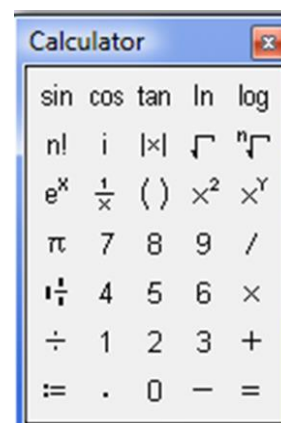
1. *Calculator*- paleta pentru calcule aritmetice
2. *Graph*- paleta pentru grafice
3. *Matrix*- paleta pentru masive (vectori și matrici)
4. *Evaluation*- paleta de evaluare
5. *Calculus*- paleta de calcul integral
6. *Boolean*- paleta booleană
7. *Programming*- paleta de programare
8. *Greek*- paleta de litere grecești
9. *Symbolic*- paleta de calcul simbolic





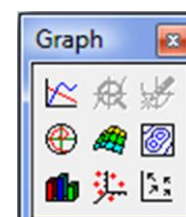
Paleta Calculator

Buton	Semnificație
sin	Funcția sinus
cos	Funcția cosinus
tan	Funcția tangentă
ln	Funcția logaritm natural
log	Funcția logaritm zecimal
$n!$	Factorialul
i	Partea imaginară a unui nr. complex
$ x $	Funcția modul (calculează modulul unui nr. real sau complex)
$\sqrt{\quad}$	Radicalul de ordin 2
$\sqrt[n]{\quad}$	Radicalul de ordin n
e^x	Funcția exponențială
$1/x$	Inversul lui x
()	Perechea de paranteze
x^2	Ridicarea la pătrat
x^y	Ridicarea la putere
π	Constanta π
/	Operația de împărțire
$\div$	Fracție mixtă
$\times$	Operația de înmulțire
$\div$	Operația de împărțire
+	Operația de adunare
$:=$	Operația de atribuire
.	Punctul zecimal
=	Semnul egal, utilizat pentru evaluarea numerică a expresiei din partea stânga a sa



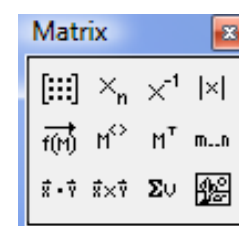
Paleta Graph

Buton	Semnificație
	Generează o regiune pentru reprezentarea carteziană
	Generează o regiune pentru reprezentarea polară
	Generează o regiune pentru reprezentarea în 3D sub formă de pânze
	Generează o regiune pentru reprezentarea 3D sub formă de linii de nivel
	Generează o regiune pentru reprezentarea în 3D sub formă de bare
	Generează o regiune pentru reprezentarea în 3D sub formă de puncte în spațiu
	Generează o regiune pentru reprezentarea în 3D sub formă de vectori



Paleta Matrix

Buton	Semnificație
	Permite scrierea unei matrice cu m linii și n coloane
$\times_n$	Indice de vector sau indici de matrice (se separă prin virgulă)
$\times^{-1}$	Inversa unei matrice

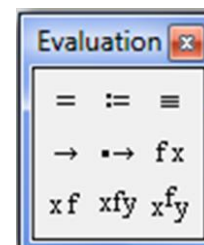




$ \times $	Determinantul unei matrice sau norma unui vector (calculează $\sqrt{x^T \cdot x}$ ptr. vectori ce au componente reale sau $\sqrt{x \cdot \overline{x}}$ ptr. vectori ce au componente complexe)
$M^{<k>}$	Coloana k din matrice
$\vec{f(M)}$	Vectorizarea valorilor unei expresii
M^T	Transpusa unei matrice
$m..n$	Generează valorile unei progresii aritmetice (m este primul element, n este ultimul element); implicit rația este 1, dar poate fi schimbată tastând după m o virgulă și apoi următoarea valoare din progresia aritmetică
$\vec{u} \cdot \vec{v}$	Produs scalar
$\vec{u} \times \vec{v}$	Produs vectorial (numai între vectori de dimensiune 3)
$\sum U$	Calculează suma elementelor unui vector
	Creează o regiune pentru imagini (vizualizarea grafică a unei matrice)

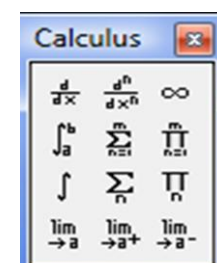
Paleta Evaluation

Buton	Semnificație
=	Evaluarea numerică (comanda identică cu cea de pe paleta Calculator)
:=	Operația de atribuire (comanda identică cu cea de pe paleta Calculator)
$\rightarrow$	Evaluare simbolică (comanda identică cu cea de pe paleta Symbolic)
$\mapsto$	Evaluare simbolică aplicând o funcție de calcul simbolic (comanda identică cu cea de pe paleta Symbolic)



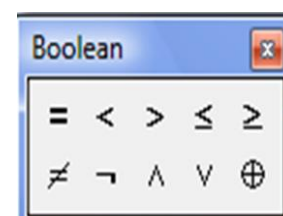
Paleta Calculus

Buton	Semnificație
$\frac{d}{dx}$	Derivarea unei expresii în raport cu variabila precizată
$\frac{d^n}{dx^n}$	Derivata de ordinul n a unei expresii în raport cu variabila precizată
∞	infinit
$\int_a^b$	Calculul integralei definite
$\sum_{n=1}^m$	Suma după indice
$\prod_{n=1}^m$	Produs după indice
$\int$	Calculul primitivei unei funcții
$\sum_n$	Suma după un anumit rang al unei expresii
$\prod_n$	Produs după un anumit rang al unei expresii
$\lim_{x \rightarrow a}$	Limita când o variabilă tinde la o constantă a sau la $\pm \infty$
$\lim_{x \rightarrow a^+}$	Limita la dreapta: limita când o variabilă converge la o constantă a sau la $-\infty$, iar variabila este mai mare ca și constanta a
$\lim_{x \rightarrow a^-}$	Limita la stânga: limita când o variabilă converge la o constantă a sau la $+\infty$, iar variabila este mai mică ca și constanta a



Paleta Boolean

Buton	Semnificație
=	Operatorul relațional de egalitate
<	Operatorul relațional mai mic

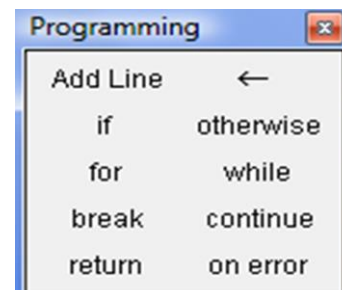




>	Operatorul relațional mai mare
≤	Operatorul relațional mai mic sau egal
≥	Operatorul relațional mai mare sau egal
≠	Operatorul relațional diferit
¬	Operatorul logic negație
∧	Operatorul logic și
∨	Operatorul logic sau

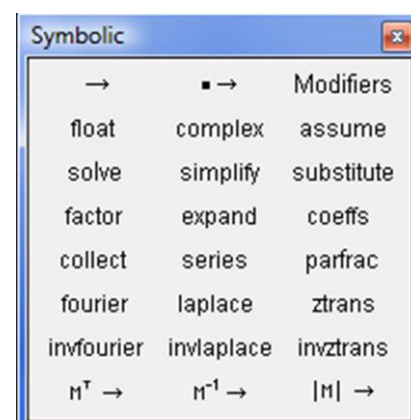
Paleta Programming

Buton	Semnificație
Add Line	Inserează o nouă linie de program
←	Atribuire locală- se atribuie valoarea din partea dreaptă a variabilei din partea stanga a semnului ←
if	Instrucțiunea <i>if</i>
otherwise	Instrucțiunea <i>otherwise</i>
for	Instrucțiunea <i>for</i>
while	Instrucțiunea <i>while</i>
break	Instrucțiunea <i>break</i>
continue	Instrucțiunea <i>continue</i>
return	Instrucțiunea <i>return</i> - închide programul și returnează valoarea calculată



Paleta Symbolic

Buton	Semnificație
→	Evaluare simbolică
■ →	Evaluare simbolică aplicând o funcție de calcul simbolic
float	Evaluarea simbolică a unei expresii cu o precizie de <i>m</i> cifre zecimale
complex	Evaluarea simbolică a unei expresii complexe
assume	Se impun constrângeri variabilelor din expresia evaluată
solve	Rezolvă o ecuație pentru o variabilă precizată sau în cazul sistemelor de ecuații pentru variabilele precizate într-un vector
simplify	Simplifică simbolic o expresie
substitute	Substituie o valoare într-o expresie
factor	Factorizează o expresie în produs
expand	Expandarea unei expresii
coeffs	Determină coeficienții unui polinom scris sub formă de polinom factor
collect	Colectează termenii asemenea dintr-o expresie
series	Dezvoltare în serie de puteri a unei expresii în una sau mai multe variabile în jurul unui punct
parfrac	Dezvoltarea în sumă de fracții simple
$M^T \rightarrow$	Transpusa simbolică a unei matrice





$M^{-1} \rightarrow$	Inversa simbolică a unei matrice
$ M \rightarrow$	Determinantul simbolic al unei matrice

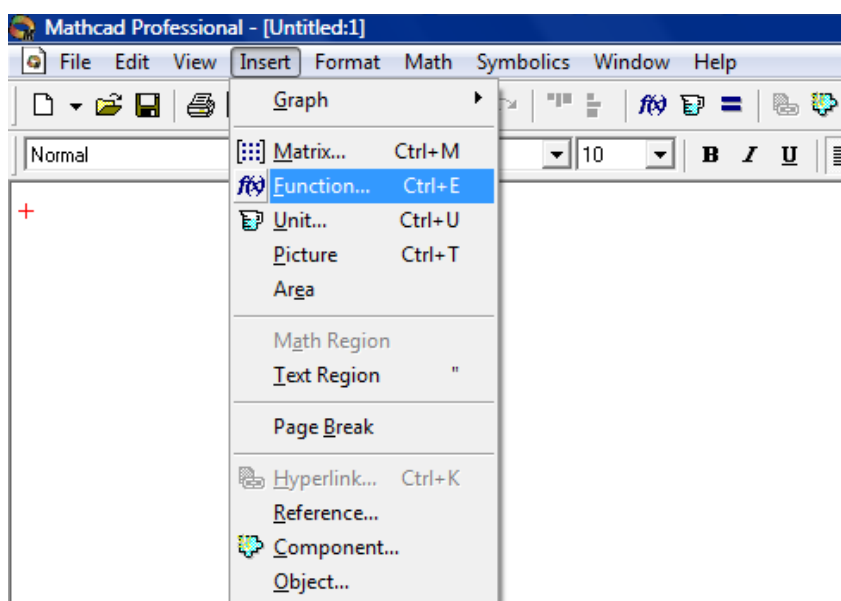
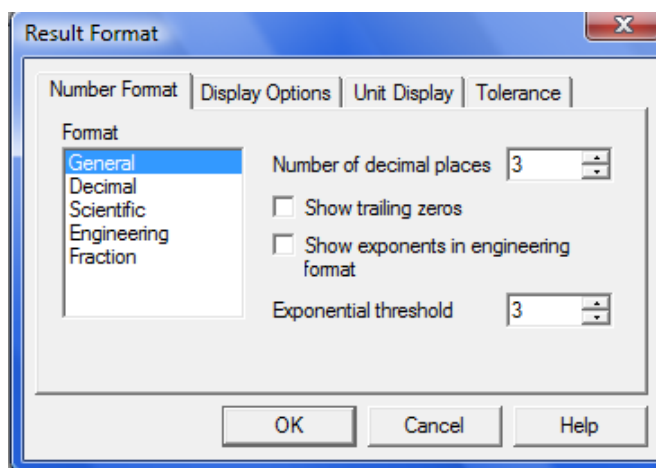
Mathcad utilizează următorii operatori aritmetici între doi scalari:

Nume operator	Forma algebrică	Forma Matlab 7.0
Adunarea	$x + y$	$x + y$
Scăderea	$x - y$	$x - y$
Înmulțirea	$x * y$	$x \times y$
Împărțirea	$x : y$	x / y
Ridicarea la putere	x^y	x^y

Ordinea operațiilor din Mathcad este aceeași cu cea a operațiilor aritmetice, cunoscute din matematica elementară, adică se efectuează întâi operațiile cuprinse în paranteze, apoi ridicarea la putere, înmulțirea și împărțirea, adunarea și scăderea.

Activând paleta *Calculator* se pot construi expresii matematice, care se pot evalua numeric doar prin acționarea tastei = sau a butonului corespunzător existent în această paletă. Dacă acționăm tasta =, în mod implicit, rezultatele obținute prin calcularea unor expresii matematice se afișează cu 3 zecimale. Activând comanda *Result* din meniul *Format* se poate alege un alt format de afișare a rezultatelor. Cu ajutorul fișei *Number Format* se alege modul de afișare al rezultatelor, alegând din lista *Format* una din opțiunile: *General*, *Decimal*, *Scientific*, *Engineering* și *Fraction*.

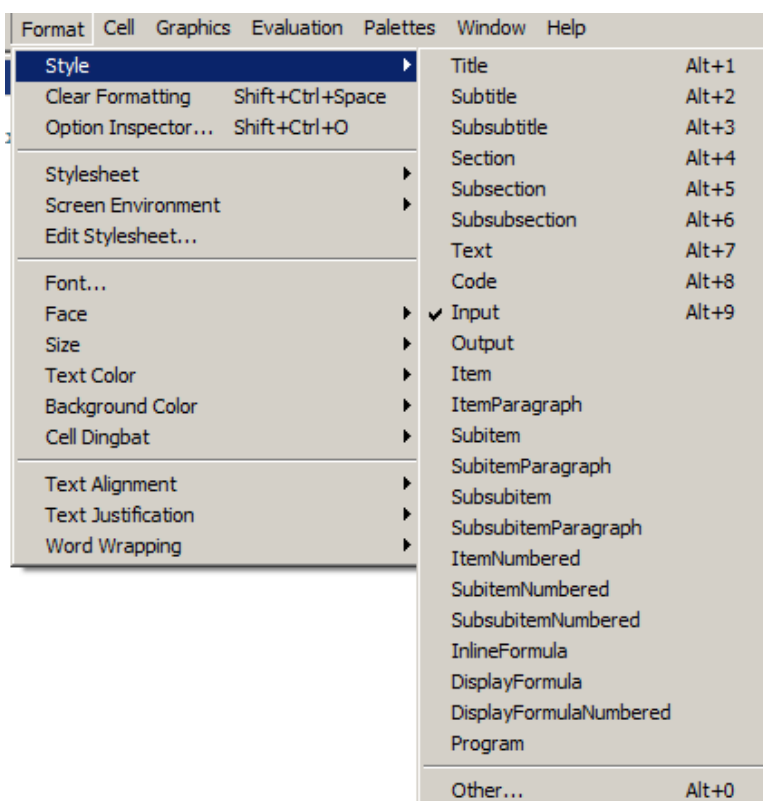
Pentru calculul unor expresii putem apela la posibilitatea de a insera în expresie funcții. Inserarea de funcții se poate face de pe paletele *Calculator*, *Calculus* sau *Matrix* sau apelând din meniul *Insert* la comanda *Insert Function*.





L1.1.2. Introducere în Mathematica

Notebook-urile Mathematica sunt documente electronice care pot conține comenzi, rezultate, text, grafică. Un *notebook* în Mathematica constă dintr-o listă de celule. Celulele sunt evidențiate de-a lungul marginii din dreapta a notebook-ului prin intermediul unor paranteze albastre. Celulele pot conține subcelule și așa mai departe; un notebook se evaluează celulă cu celulă. Accesând *Format* → *Style* se observă că există numeroase tipuri de celule: de intrare (ce vor fi evaluate) , text (pentru comentarii) , pentru titluri, etc:



Paletele de care dispune Mathematica sunt superioare celor existente în Mathcad și pot fi utilizate pentru: construirea sau editarea expresiilor matematice, texte, grafică și permit accesul (acționând click cu mouse-ul) la cele mai frecvente simboluri matematice.

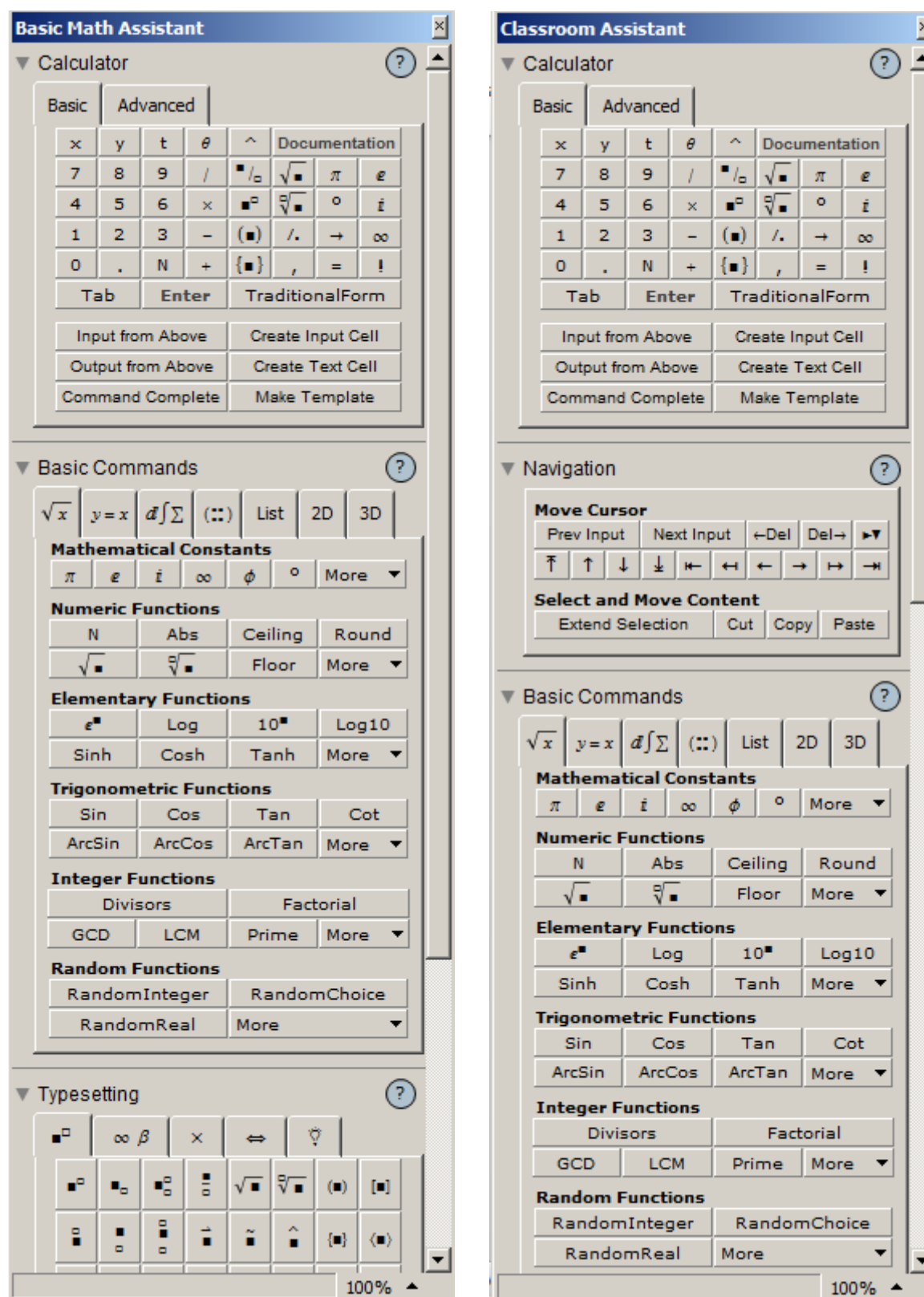
Deoarece folosind Mathematica se pot realiza multe operații diferite, nu pot fi alocate toate funcțiile existente odată cu deschiderea software-ului. Unele dintre ele sunt stocate în pachete, care se pot accesa în timpul unei sesiuni cu ajutorul comenzii **Needs**. Lista packetelor încărcate în sesiunea de lucru se vizualizează astfel:

```
In[2]:= $Packages
```

```
Out[2]:= {ResourceLocator`, DocumentationSearch`, GetFEKernelInit`,  
JLink`, PacletManager`, WebServices`, System`, Global`}
```



În Mathematica 8, paletele sunt: **Basic Math Assistant** și **Classroom Assistant**. În aceste palete sunt listate cele mai des utilizate comenzi, funcții, opțiuni și constante.

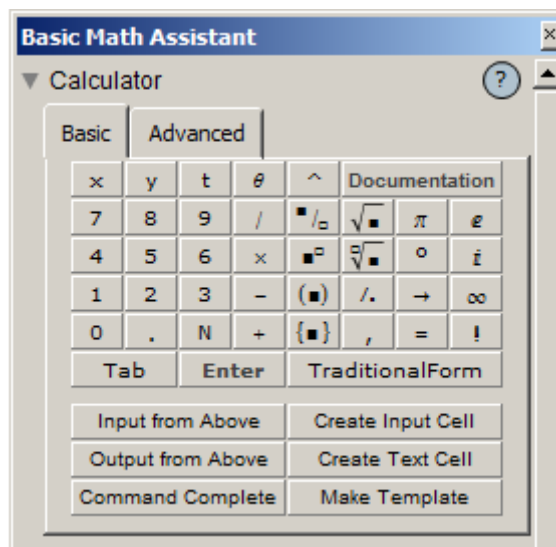


Paleta **Basic Math Assistant** cuprinde patru zone: **Calculator**, **Basic Commands**, **Typesetting** și **Help and Settings**.



Zona Calculator- fișa Basic Math Asistent

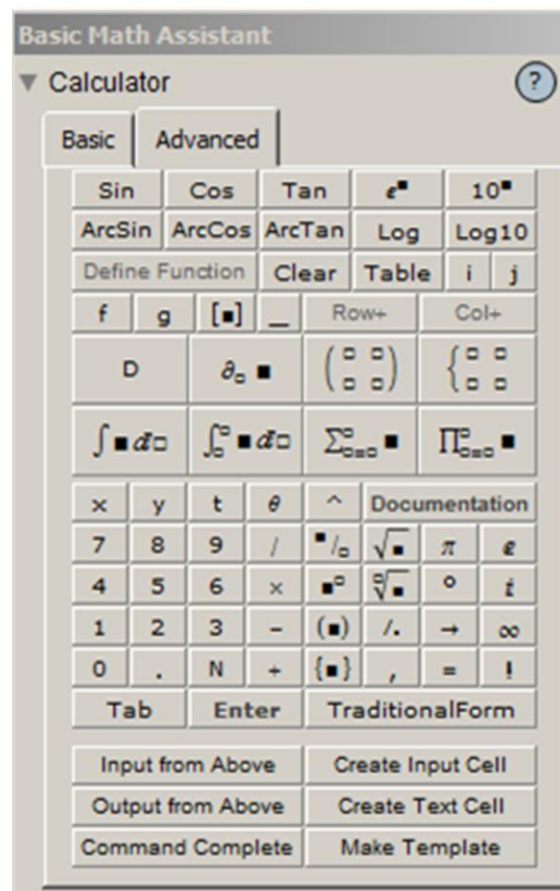
Buton	Semnificație
$\times$	Variabila x
y	Variabila y
t	Variabila t
θ	Variabila θ
$\wedge$	Ridicarea la putere
Documentation	Deschide <i>Help</i> - ul
$\div$	Operatorul de împărțire
$\frac{\square}{\square}$	Scrierea sub formă de fracție
$\sqrt{\square}$	Radicalul de ordin 2
π	Constanta π
e	Constanta e
$\times$	Operația de înmulțire Produs vectorial
$\square^\square$	Ridicarea la putere
$\sqrt[n]{\square}$	Radicalul de ordin n
$^\circ$	Grade
i	Partea imaginară a unui nr. complex
$-$	Operația de scădere
$(\square)$	Perechea de paranteze
$/.$	Substituire (<i>Replace all</i>)
$\rightarrow$	Utilizat în scrierea unei reguli
∞	infinit
$.$	Punctul zecimal sau Produs scalar
N	Evaluare numerică
$+$	Operația de adunare
$\{\square\}$	Perechea de acolade
$,$	Virgula
$=$	Operația de atribuire
$!$	Factorialul
Tab	Plasează un <i>Tab</i> înaintea cursorului
Enter	Determină evaluarea comenzii de care este precedat
TraditionalForm	Afișează o expresie în formă tradițională (matematică)
Input from Above	Afișează o comandă anterioară
Output from Above	Afișează o rezultatul returnat de comanda anterioară
Create Input Cell	Creează o nouă celulă de intrare
Create Text Cell	Creează o nouă celulă de tip text
Command Complete	Afișează lista comenzilor care încep cu litera situată în stânga cursorului





Zona Calculator- fișa Advanced

Buton	Semnificație
	Funcția sinus
	Funcția cosinus
	Funcția tangentă
	Funcția exponențială
	Ridică pe 10 la o putere
	Funcția arcsin
	Funcția arccos
	Funcția arctg
	Funcția logaritm natural
	Funcția logaritm zecimal
	Permite definirea unei funcții
	Șterge variabile și funcții
	Generează o listă
	Variabila i
	Variabila j
	Variabila f
	Variabila g
	Perechea de parenteze drepte
	Caracterul <i>underscore</i> , care se plasează după argumentul unei funcții
	Inserează o linie într-o matrice, sub linia curentă
	Inserează o coloană într-o matrice, sub linia curentă
	Derivarea unei expresii
	Derivata parțială în raport cu o variabilă
	Permite scrierea unei matrice
	Folosit în scrierea unei funcții, definită pe ramuri
	Calculul primitivei unei funcții
	Calculul integralei definite
	Suma după indice
	Produs după indice





Zona Basic Commands

Zona conține următoarele 7 secțiuni (tab-uri):

cu funcții matematice	pentru calcule algebrice și rezolvări de ecuații	calcule și optimizări	dedicat matricelor și Algebrei liniare	pentru liste și tabele	utilizat pentru grafice 2D	utilizat pentru grafice 3D

Basic Commands

Mathematical Constants

π e i ∞ ϕ $\circ$ More

Numeric Functions

N Abs Ceiling Round

$\sqrt{\quad}$ $\sqrt[n]{\quad}$ Floor More

Elementary Functions

$e^{\quad}$ Log $10^{\quad}$ Log10

Sinh Cosh Tanh More

Trigonometric Functions

Sin Cos Tan Cot

ArcSin ArcCos ArcTan More

Integer Functions

Divisors Factorial

GCD LCM Prime More

Random Functions

RandomInteger RandomChoice

RandomReal More

Basic Commands

Expressions and Equations

Simplify Solve

Expand NSolve

Factor FindRoot

Together Apart

More Algebraic Trig

Basic Commands

Calculus

D Limit

Integrate Integrate (definite)

Sum DSolve

$\partial_{\quad}$ $\partial_{\quad,\quad}$

$\int \quad d\quad$ $\int_{\quad}^{\quad} \quad d\quad$

$\sum_{\quad=\quad}^{\quad}$ $\prod_{\quad=\quad}^{\quad}$

More Numeric

Multivariable Calculus

Basic Commands

Linear Algebra and Matrices

$\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$ Add Row Add Column

RowReduce Inverse

LinearSolve Transpose

MatrixForm MatrixPower

More Create

Matrix Decompositions

Basic Commands

Tables, Lists, and Vectors

Table TableForm

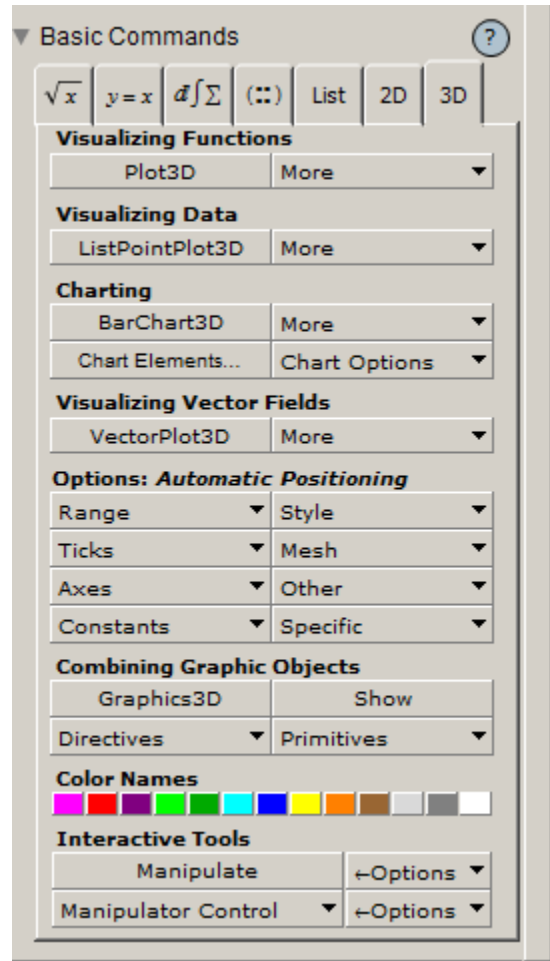
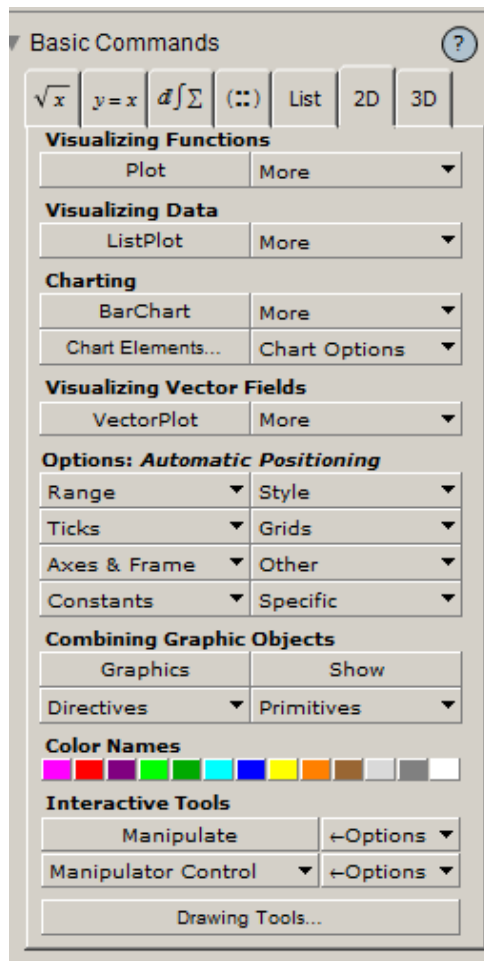
Range Length

Sort Mean

Min Max

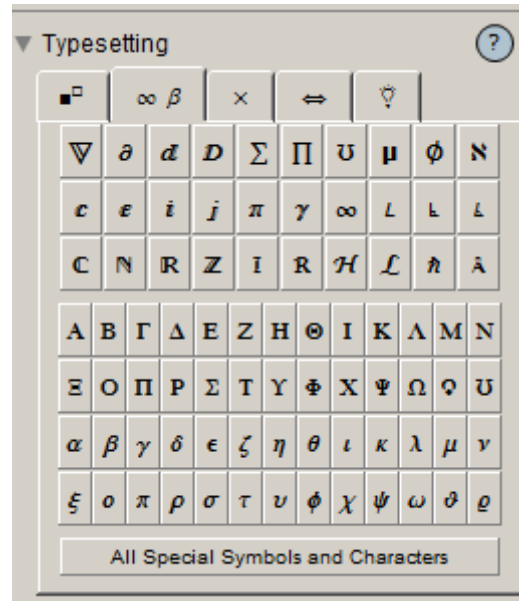
Tables Lists

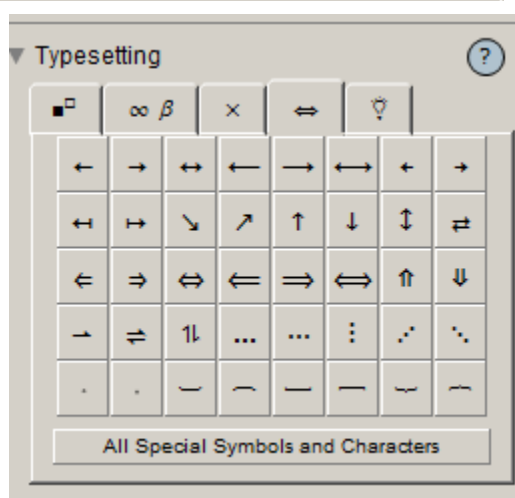
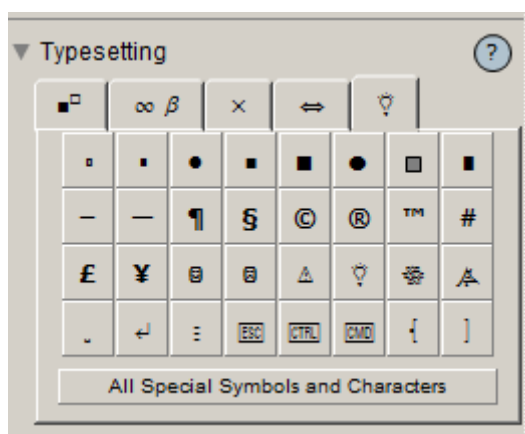
Statistics Vectors



Zona Typesetting

Zona furnizează simboluri utilizate în modul text. Unele dintre acestea se folosesc și în model de lucru.



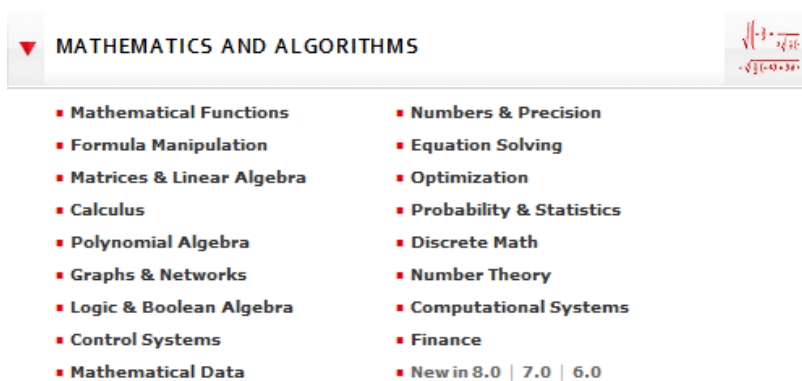


Funcțiile predefinite de care dispune Mathematica pot fi accesate din meniul *Help*.

Mathematica reprezintă numerele în sistem zecimal, utilizând o precizie specificată de utilizator. Funcțiile principale dedicate aproximațiilor numerice sunt:

- ✓ **N[expr, n], SetPrecision[expr, n]**- realizează aproximarea numerică a expresiei expr cu n cifre,
- ✓ **ScientificForm[expr,n], EngineeringForm[expr,n]**- notație științifică și tehnică de aproximare numerică a expr cu n cifre semnificative.

Mathematica este sensibilă la majuscule, adică există diferență între literele mici și mari. Toate funcțiile în Mathematica încep cu literă mare; unele funcții (de exemplu, PlotPoints) folosesc mai mult de o majusculă.



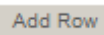
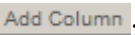
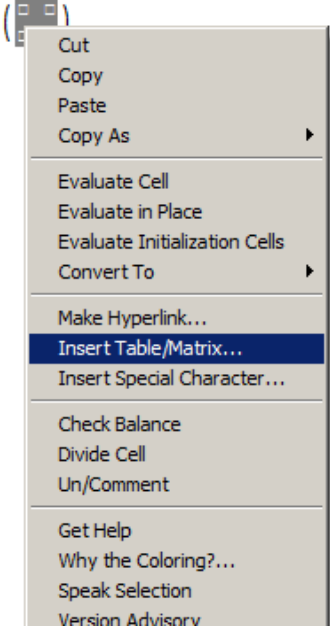


Pe lângă operatorii aritmetici clasici, întâlniți și în Mathcad, Mathematica utilizează și operatori aritmetici suplimentari:

x++	x--	++x	--x	x+=y	x-=y	x*=y	x/=y
incrementare	decrementare	preincrementare	predecrementare	adaugă y la x	scade y din x	înmulțește x cu y	împarte x la y

Diferența dintre operatorii = și == este: operatorul lhs=rhs este folosit pentru a asigura rhs la lhs iar operatorul de egalitate lhs==rhs indică egalitatea (nu atribuirea) dintre lhs și rhs.

După ce Mathematica evaluează o comandă (*Evaluation*→*Evaluate Cells*), afișează un rezultat și introduce o nouă linie orizontală după acesta. Evaluarea tuturor comenzilor dintr-un *notebook* se realizează selectând *Evaluation*→*Evaluate Notebook*.

Scrierea unei matrice (vector)	
Mathcad	Mathematica
- se scrie variabila care reprezintă matricea, urmată de “:”; - se acționează butonul  din paleta <i>Matrix</i>	► sub formă de listă: m={{a11,a12},{a21,a22}} matrice v={v1,v2,v3} vector ► accesând butonul din  zona <i>Basic Commands</i>; Suplimentarea numărului de linii (coloane) ale unei matrice: - utilizând butoanele  și ; - apăsând butonul dreapta al mouse-ului și selectând: 

Apelând la comanda *Matrix* în Mathcad pentru crearea manuală a unei matrice nu se va permite introducerea matricelor mai mari de aproximativ 15×15. Pentru a introduce matrice de dimensiuni mai mari există următoarele 2 posibilități:

- 1) folosirea unei funcții pentru citirea matricelor din fișiere, create cu editoare de texte;



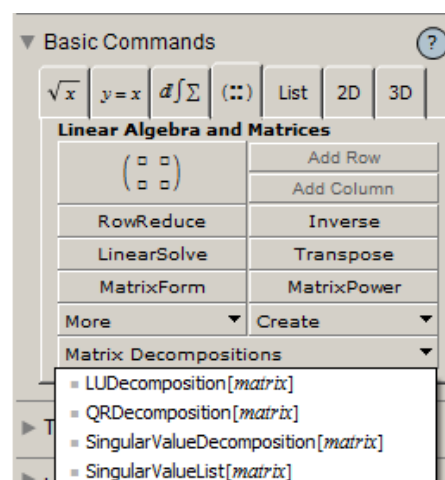
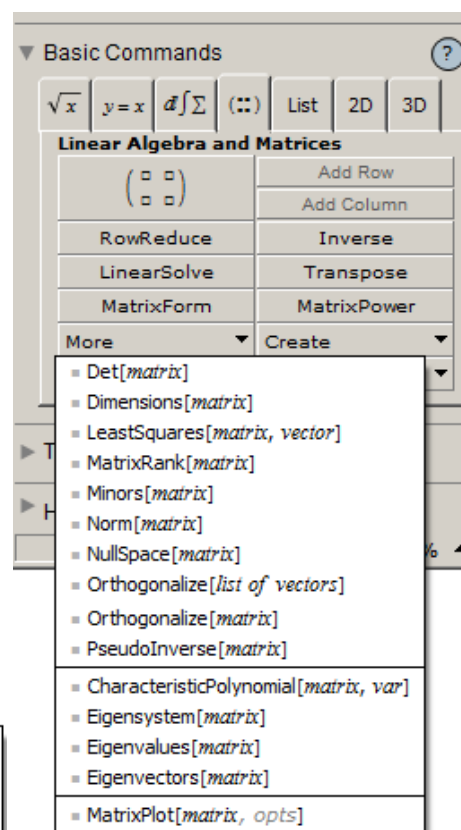
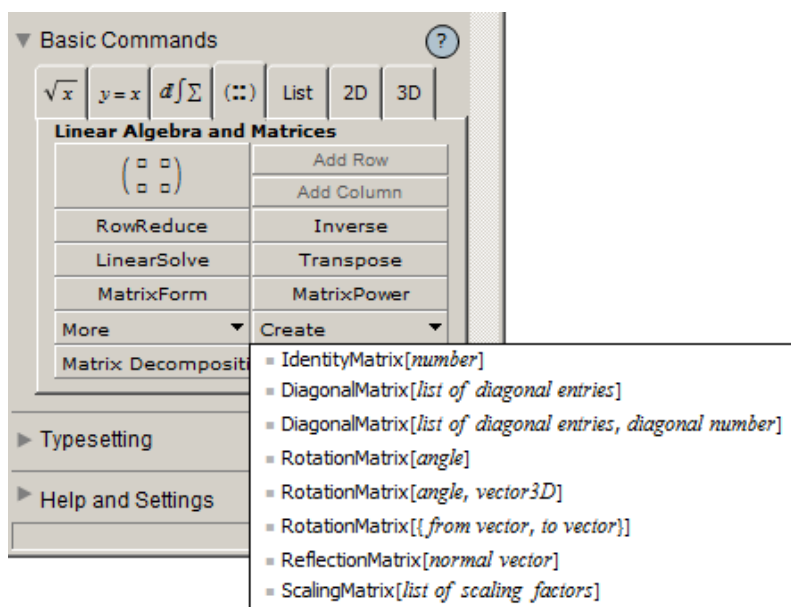
- 2) precizarea elementelor matricei respective printr-un program, ce atribuie elementele respective.

În schimb, în Mathematica putem defini matrice și de dimensiune 1000x1000.

Identificarea elementelor unei matrice	
Mathcad	Mathematica
butonul $\times_n$ din paleta <i>Matrix</i>	<code>expr[[i]]</code> or <code>Part[expr, i]</code> pentru vectori <code>expr[[i, j, ...]]</code> or <code>Part[expr, i, j, ...]</code> pentru matrice

Dacă în Mathcad indicii elementelor unei matrice încep de la 0, aceștia iau valori de la 1, în Mathematica. Regula din Mathcad poate fi modificată setând constanta ORIGIN la valoarea 1, adică scriind ORIGIN:=1.

Operațiile care se pot efectua în Mathcad asupra matricelor (cu paleta *Matrix*) sunt: inversarea matricei, calculul determinantului, vectorizarea valorilor unei funcții, ce are ca argument o matrice, extragerea coloanei de matrice, transpusa unei matrice, desenul de umplere a matricei. Pe lângă operațiile care se pot efectua în Mathcad asupra matricelor, Mathematica dispune de:





Principalele funcții pentru matrice	
Mathcad	Mathematica
Generează matricea identitate, de ordinul indicat ca argument	
identity (n)	<code>IdentityMatrix[n]</code> din zona <i>Basic Commands</i>
Obținerea matricei de rotație	
nu există funcție predefinită	<code>RotationMatrix[θ]</code> returnează matricea de rotație 2x2 corespunzătoare rotației vectorilor planului în jurul originii, cu unghiul θ, în sens trigonometric <code>RotationMatrix[θ, w]</code> returnează matricea de rotație 3x3 corespunzătoare rotației vectorilor din spațiu în jurul originii, cu unghiul θ, în sens trigonometric
Obținerea matricei asociată simetriei față de o dreaptă, având un anumit vector director	
nu există funcție predefinită	<code>ReflectionMatrix[v]</code>
Determină rangul matricei, ce constituie argumentul funcției	
rank (A)	<code>MatrixRank[m]</code> din zona <i>Basic Commands</i>
Concatenarea pe orizontală a matricelor cu același număr de linii	
augment (A, B, C, ...)	<code>AppendRows[A,B,C...]</code>
Concatenarea pe verticală a matricelor cu același număr de coloane	
stack (A, B, C, ...)	<code>AppendRows[A,B,C...]</code>
Reduce blocul matriceal $[A I]$ în $[I A^{-1}]$	
rref (A)	butonul <code>RowReduce</code> din zona <i>Basic Commands</i> funcția <code>RowReduce[m]</code>
Determină urma unei matrice	
tr (M)	<code>Tr[list]</code>
Ridicarea unei matrice la o putere	
nu există funcție predefinită	butonul <code>MatrixPower</code> din zona <i>Basic Commands</i> funcția <code>MatrixPower[m, n]</code>
Calculul determinantului unei matrice pătratică	
butonul <code> x </code> din paleta <i>Matrix</i>	<code>Det[m]</code>



Aflarea inversei unei matrice pătratică	
butonul x^{-1} din paleta <i>Matrix</i>	butonul Inverse din zona <i>Basic Commands</i> funcția Inverse [<i>m</i>]
Aflarea pseudoinversei unei matrice	
nu există funcție predefinită	PseudoInverse [<i>m</i>]
Calcularea minorilor unei matrice	
nu există funcție predefinită	Minors [<i>m</i>] Minors [<i>m</i> , <i>k</i>] pentru minorii de ordin <i>k</i>
Obținerea matricei transpuse	
butonul M^T din paleta <i>Matrix</i>	butonul Transpose din zona <i>Basic Commands</i> funcția Transpose [<i>m</i>]
Determinarea dimensiunii unei matrice	
cols (<i>A</i>) returnează numărul coloanelor matricei argument rows (<i>A</i>) returnează numărul de linii ale matricei argument	Dimensions [<i>expr</i>]
Găsirea elementului minim și respectiv maxim al unei matrice	
min (<i>A</i> , <i>B</i> , <i>C</i> , ...) max (<i>A</i> , <i>B</i> , <i>C</i> , ...)	Min [<i>x</i> ₁ , <i>x</i> ₂ , ...] Max [<i>x</i> ₁ , <i>x</i> ₂ , ...]
Returnează linia și coloana pe care se află un element într-o matrice	
match (<i>z</i> , <i>A</i>)	Position [<i>expr</i> , <i>pattern</i>]
Extragerea unei submatrice dintr-o matrice	
submatrix (<i>A</i> , <i>i</i> _r , <i>j</i> _r , <i>i</i> _c , <i>j</i> _c) extrage o submatrice din matricea <i>A</i> , începând de la linia <i>i</i> _r până la linia <i>j</i> _r și de la coloana <i>i</i> _c până la coloana <i>j</i> _c	expr [<i>i</i> _r ;; <i>j</i> _r , <i>i</i> _c ;; <i>j</i> _c]
Determinarea nucleului unei aplicații liniare, data prin matricea sa asociată	
nu există funcție predefinită	NullSpace [<i>m</i>]
Calculul valorilor și vectorilor proprii pentru o matrice pătratică	
eigenvals (<i>M</i>) returnează un vector cu valorile proprii	Eigenvalues [<i>m</i>] Eigenvalues [<i>m</i> , <i>k</i>] returnează primele <i>k</i> valori proprii
eigenvec (<i>M</i> , <i>z</i>) returnează vectorul propriu corespunzător unei valori proprii	Eigenvectors [<i>m</i> , <i>k</i>] returnează primii <i>k</i> vectori proprii



eigenvecs(M) returnează o matrice ale cărei coloane reprezintă vectorii proprii corespunzători valorilor proprii ale matricei respective	Eigensystem[m] returnează valorile și vectorii proprii ale unei matrice Eigensystem[m, k] returnează primele k valori proprii și vectorii proprii corespunzători acestora
--	---

L1.2. Calcul numeric în Mathcad și Mathematica cu aplicații în Algebră

Exemplul L1.1. Să se calculeze expresiile:

a)
$$\frac{\ln 56 + \sin \cos \sqrt{44.67}}{\sqrt[3]{\ln 678 + \log_{10} 223.98 - \operatorname{tg} \sin \frac{\pi}{\sqrt{e}}}}$$

Mathcad:
$$\frac{\ln(56) + \sin(\cos(\sqrt{44.67}))}{\sqrt[3]{\ln(678) + \log(223.98) - \tan\left(\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{e}}\right)\right)}} = 2.4645961$$

Mathematica:

```
In[28]:= a = (Log[56] + Sin[Cos[Sqrt[44.67]]]) / Sqrt[Log[678] + Log10[223.98] - Tan[Sin[Pi / Sqrt[e]]] ] ;
In[29]:= SetPrecision[a, 8]
Out[29]= 2.4645961
```

b)
$$\sqrt{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[4]{4} \sqrt[5]{5}$$

Mathcad:
$$\left[\left[(\sqrt{2})^{\sqrt[3]{3}} \right]^{\sqrt[4]{4}} \right]^{\sqrt[5]{5}} = 2.6520023336841$$

Mathematica:

```
In[38]:= b = Sqrt[2] Sqrt[3] Sqrt[4] Sqrt[5] ;
In[40]:= SetPrecision[b, 14]
Out[40]= 2.6520023336841
```



c) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$

Mathcad: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = -2i$

Mathematica:

In[42]:= $((1 + i) / (1 - i))^3 - ((1 - i) / (1 + i))^3$

Out[42]= $-2 i$

Exemplul L1.2. Să se calculeze expresiile următoare:

a) $C = \cos^4 x + \cos^4 3x + \cos^4 5x + \cos^4 7x$, pentru $x = \frac{\pi}{8}$;

$$x := \frac{\pi}{8} \quad i := 1, 3, 5, 7$$

Mathcad: $C := \sum_i \cos(i \cdot x)^4 \quad C = 1.5$

sau

$$C := \cos(x)^4 + \cos(3 \cdot x)^4 + \cos(5 \cdot x)^4 + \cos(7 \cdot x)^4$$

Mathematica:

In[43]:= $x = \pi / 8 ;$

In[47]:= $N[\text{Sum}[\text{Cos}[k \cdot x]^4, \{k, 1, 7, 2\}]]$

Out[47]= 1.5

b) $A = \log_6 7 - \log_6 \frac{7}{36} + \log_2 5 + 3^7 + e^3$

Mathcad: $A := \log(7, 6) - \log\left(\frac{7}{36}, 6\right) + \log(5, 2) + 3^7 + e^3$
 $A = 2211.407$

Mathematica:

In[52]:= $N[\text{Log}[6, 7] - \text{Log}[6, 7 / 36] + \text{Log}[2, 5] + 3^7 + e^3, 7]$

Out[52]= 2211.407



Exemplul L1.3. Verificați dacă numerele 87 și 41 sunt prime între ele.

Mathcad: $\gcd(87, 41) = 1$

Mathematica:

In[53]:= GCD[87, 41]

Out[53]= 1

Deoarece c.m.m.d.c(87,41)=1 rezultă că numerele 87 și 41 sunt prime între ele.

Exemplul L1.4. Aflați cel mai mic multiplu comun al numerelor : 40, 36, 126.

Mathcad: $\text{lcm}(40, 36, 126) = 2520$

Mathematica:

In[54]:= LCM[40, 36, 126]

Out[54]= 2520

Exemplul L1.5. Să se calculeze produsul scalar și cosinusul unghiului dintre vectorii

$$\vec{x} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \text{ și } \vec{a} = -2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k}.$$

Mathcad:

$$\begin{aligned} \vec{x} &:= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \vec{a} &:= \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ s &:= \vec{x} \cdot \vec{a} & s &= -4.5 \\ u &:= \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=0}^2 (x_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=0}^2 (a_i)^2}} & u &= -0.802 \end{aligned}$$

Mathematica:

In[15]:= x = {2, 1, -1}; a = {-2, 1/2, 1};

In[16]:= Dot[x, a]

Out[16]= $-\frac{9}{2}$

In[22]:= VectorAngle[x, a]

Out[22]= $\text{ArcCos}\left[-\frac{3}{\sqrt{14}}\right]$



Exemplul L1.6. Calculați produsul vectorial al vectorilor $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{j} + 4\vec{k}$.

Mathcad:

$$u := (3 \quad -2 \quad 1)^T \quad v := (0 \quad -1 \quad 4)^T$$

$$u \times v = \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Mathematica:

```
In[3]:= {3, -2, 1} * {0, -1, 4}
```

```
Out[3]:= {-7, -12, -3}
```

Exemplul L1.7. Calculați produsul mixt al vectorilor:

$$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{w} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Mathcad:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad |A| = -60$$

Mathematica:

```
In[59]:= A = {{1, 2, -1}, {2, 3, 4}, {-4, 3, -2}};
```

```
In[60]:= Det[A]
```

```
Out[60]:= -60
```

Exemplul L1.8. Determinați valorile și vectorii proprii ai matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Mathcad:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvecs}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.816 \\ 0.707 & 0.949 & 0.408 \\ 0.707 & -0.316 & 0.408 \end{pmatrix}$$



Mathematica:

```
In[63]:= A =  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 
Out[63]= {{1, 0, 0}, {1, 2, -3}, {1, -1, 0}}

In[64]:= Eigenvalues[A]
Out[64]= {3, -1, 1}

In[65]:= Eigenvectors[A]
Out[65]= {{0, -3, 1}, {0, 1, 1}, {2, 1, 1}}
```

Exemplul L1.9. Determinați vectorul propriu corespunzător celei mai mari valori proprii (în valoare absolută) a matricei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1.6 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0.5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -7.6 & 5 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 20 & -1 \\ 8 & 0 & -0.6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

În Mathcad se folosește funcția $\text{eigenvec}(A, v_i)$, unde v este vectorul ce conține valorile proprii ale lui A iar i este indicele celei mai mari valori proprii.

Exemplul L1.10. Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Să se reducă blocul matriceal $[A|I]$ în $[I|A^{-1}]$, I fiind matricea unitate de ordinul 3.

Mathcad:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad I := \text{identity}(3)$$

$$B := \text{augment}(A, I)$$

$$\text{rref}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.333 & -0.25 & -0.167 \\ 0 & 1 & 0 & -0.333 & 0 & -0.333 \\ 0 & 0 & 1 & -0.333 & 0.5 & -0.333 \end{pmatrix}$$



Mathematica:

```
In[5]:= A =  $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ;

In[8]:= i = IdentityMatrix[3];

In[13]:= Needs["LinearAlgebra`MatrixManipulation`"];

In[11]:= B = AppendRows[A, i];

In[12]:= MatrixForm[RowReduce[B]]

Out[12]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Exemplul L1.11. Sa se vectorizeze valorile functiei $f(x) = x^3$, ce are ca argument matricea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Mathcad

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad f(x) := x^3 \quad \longrightarrow \quad f(A) = \begin{pmatrix} 125 & -1 & -1 \\ 1 & 216 & 1 \\ 1 & -1 & 343 \end{pmatrix} \quad f(A) = \begin{pmatrix} 92 & -70 & -124 \\ 106 & 180 & 106 \\ 88 & -142 & 304 \end{pmatrix}$$

Mathematica:

```
In[24]:= A =  $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ ;

In[25]:= f[x_] := x^3

In[26]:= f[A]

Out[26]= {{125, -1, -1}, {1, 216, 1}, {1, -1, 343}}
```

]

]

]



L1.3. Calcul numeric în Mathcad și Mathematica cu aplicații în Analiză matematică

Exemplul L1.12. Calculați derivata de mai jos, în punctul indicat:

$$f(x) = 2^{x^2 - 2x}, \quad f^{(3)}(-0.2) = ?$$

Mathcad:

$$f(x) := 2^{x^2 - 2 \cdot x}$$

$$x := -0.2 \quad \frac{d^3}{dx^3} f(x) = -15.631$$

Mathematica:

```
In[82]:= f[u_] := 2^(u^2 - 2*u)
In[84]:= D[f[u], {u, 3}] /. u -> -0.2
Out[84]= -15.6311
```

Exemplul L1.13. Calculați derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției

$$f(x, y) = 2x^3y - e^{x^2} \quad \text{în punctul } (-1, 1).$$

Mathcad:

$$f(x, y) := 2 \cdot x^3 \cdot y - e^{x^2} \quad x := -1 \quad y := 1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = -28.31 \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) = 6$$

Mathematica:

```
In[4]:= g[u_, v_] := 2 * u^3 * v - e^u^2
In[8]:= N[D[g[u, v], {u, 2}] /. {u -> -1, v -> 1}, 4]
Out[8]= -28.31

In[9]:= N[D[g[u, v], {v, 2}] /. {u -> -1, v -> 1}, 4]
Out[9]= 0

In[10]:= N[D[g[u, v], {u, 1}, {v, 1}] /. {u -> -1, v -> 1}, 4]
Out[10]= 6.000
```



Exemplul L1.14. Calculați următoarea integrală simplă:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

Mathcad:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2 \cdot x)}{1 + \sin(x)^2} dx = 0.693$$

Mathematica:

$$\text{In}[12]:= \text{N}\left[\int_0^{\pi/2} \frac{\sin[2 \cdot x]}{1 + \sin[x]^2} dx, 4\right]$$

$$\text{Out}[12]= 0.6931$$

Exemplul L1.15. Calculați valoarea următoarei integrale improprii:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$$

Mathcad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx = 3.142$$

Mathematica:

$$\text{In}[14]:= \text{N}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx, 4\right]$$

$$\text{Out}[14]= 3.142$$

Exemplul L1.16. Calculați valoarea următoarei integrale duble:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} y \sin^2 x dx dy.$$

Mathcad:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} y \cdot \sin(x)^2 dx dy \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \pi^3 = 7.752$$



Mathematica:

$$\text{In}[2]:= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} y \star \sin[x]^2 \, dx \, dy$$

$$\text{Out}[2]= \frac{\pi^3}{4}$$

sau

Mathematica:

$$\text{In}[3]:= \text{Integrate}[y \star \sin[x]^2, \{x, 0, \pi\}, \{y, 0, \pi\}]$$

$$\text{Out}[3]= \frac{\pi^3}{4}$$

L1.4. Exerciții propuse

1. Să se evalueze numeric expresiile:

$$(a) \sqrt{1 + \sqrt{2 + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}}$$

$$(b) \log_{\frac{1}{2}} \left(\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{4} \right) \right)$$

$$(c) \frac{\ln \left(2^{\sqrt{2}} 3^{\sqrt[3]{3}} + e^{\log_5 e} - \sin \left(\frac{\pi}{\sqrt[5]{5}} \right) \right)}{\text{tg} \left(\sqrt[3]{\log \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\ln(e)} \right) \right)} + \sqrt{\log \left(\arccos \left(\frac{\pi}{\sqrt[5]{1 + \sqrt{2}}} \right) \right)} \right)}$$

$$(d) \sum_{k=1}^{150} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$(e) \prod_{k=1}^{100} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

$$(f) (2 - \text{tg } x \sqrt{\text{ctg } x})^{\frac{1}{\sin x - \cos x}}, \text{ pentru } x = \frac{\pi}{7};$$

$$(g) \frac{1 - \prod_{k=1}^5 \cos(kx)}{x^2}, \text{ pentru } x = \frac{\pi}{5}.$$

2. Se consideră vectorul

$$x = [3.24 \ 2 \ 5 \ 3 \ 4.5 \ 7 \ 6.67 \ 8.95 \ 4.34 \ 2.12],$$



ce conține rezultatele obținute prin $N=10$ determinări experimentale. Să calculeze abaterea medie pătratică a acestor rezultate, folosind formula

$$\sigma = \sqrt{\frac{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}{N(N-1)}}.$$

3. Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze expresia

$$E = A^3 - 9A^2 + 12A - \det(A) \cdot I_3$$

4. Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

și vectorul

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Să se verifice dacă v este vector propriu al matricei A . În caz de răspuns afirmativ să se precizeze valoarea proprie corespunzătoare.

5. Calculați derivata de mai jos, în punctul indicat:

$$(a) \quad f(x) = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}, \quad f''(5.7) = ?$$

$$(b) \quad f(x) = |x| \sqrt{\frac{x}{x-1}}, \quad f^{(4)}(2) = ?$$

$$(c) \quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}, \quad f'(3) = ?$$

6. Calculați derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcțiilor următoare în punctele indicate:

$$(a) \quad f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}, \quad (-2, 2)$$

$$(b) \quad f(x, y) = x \sin(x + y), \quad \left(\frac{\pi}{4}, 0 \right)$$



(c) $f(x, y, z) = x e^{yz}$, $(1, 1, 1)$.

7. Determinați cele mai mari trei valori proprii și vectorii proprii corespunzători acestora, pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1.6 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0.5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -7.6 & 5 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 20 & -1 \\ 8 & 0 & -0.6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Să se verifice dacă

(a) $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ este soluție a ecuației de gradul al treilea: $x^3 - 2x + 1 = 0$

(b) $x_1 = -\frac{7\pi}{8}$ și $x_2 = \frac{21\pi}{22}$ sunt soluții ale ecuației $\cos \frac{3}{7}x + \sin x = 0$

(c) $u_1 = 1 + i$ este soluție a ecuației $x^2 + (1 - 2i)x - (3 + i) = 0$.

9. În spațiul euclidian real cu trei dimensiuni se consideră punctele:

$A(-1, 1, 2)$, $B(0, 1, -3)$, $C(1, -3, 2)$, $D(3, 3, 5)$. Să se calculeze:

(a) Perimetrul și aria triunghiului ABC.

(b) Volumul tetraedrului ABCD.

10. Se consideră funcția $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calculați:

$$E = y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \text{ pentru } x = 0, y = 1.$$

11. Calculați următoarele integrale simple:

(a) $\int_0^1 \frac{1}{x^3 + 1} dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$

(c) $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx$

(d) $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx$

(e) $\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx$



$$(f) \int_0^1 x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx$$

12. Calculați valoarea următoarelor integrale improprii:

$$(a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+1)^{2/3}}$$

$$(b) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$(c) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(d) \int_3^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

13. Calculați următoarele integrale duble:

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{1 + \sin x \sin y} dx dy$$

$$(b) \int_1^2 \int_1^2 \sqrt{\frac{x}{y^3}} dx dy.$$

L1.5. Bibliografie

1. M. L. Abell, J. P. Braselton, *Mathematica by Example*, Elsevier Academic Press, 2004.
2. M. L. Abell, J. P. Braselton, *Differential Equations with Mathematica*, Elsevier Academic Press, 2004.
3. G. Anastassiou, I. Iatan, *Intelligent Routines: Solving Mathematical Analysis with Matlab, Mathcad, Mathematica and Maple*, Springer, 2013.
4. G. Anastassiou, I. Iatan, *Intelligent Routines II: Solving Linear Algebra and Differential Geometry with Sage*, Springer, 2014.
5. J. M. Borwein, M. P. Skerritt, *An Introduction to Modern Mathematical Computing with Maple*, Springer, 2011.
6. O. Cira, *Lecții de Mathcad 2001 Professional*, ed. Grupul microInformatica, Cluj-Napoca, 2003.



7. D.G. Duffy, *Advanced Engineering Mathematics with Matlab*, Chapman & Hall/CRC, 2003.
8. J. Gregor, J. Tišer, *Discovering Mathematics. A Problem-Solving Approach to Mathematical Analysis with Mathematica and Maple*, Springer, 2011.
9. I. Iatan, *Îndrumător de laborator în Matlab 7.0*, ed. Conspress, București, 2009.
10. R. S. Macedo, M. F. Alfradique, M. Castier, “Automatic Generation of Matlab Functions Using Mathematica and Thermath”, *Computing in Science & Engineering*, 2008, 10(4): 41- 49.
11. I. Shingareva, C. Lizárraga- Celaya, *Maple and Mathematica. A problem solving approach for Mathematics*, Springer- Verlag, 2007.



L2. Lecția de Laborator 2. Calcule simbolice în Mathcad și Mathematica

L2.1. Breviar teoretic

Calculul simbolic se referă la evaluarea unei expresii fără a calcula valoarea numerică a expresiei respective.

Mathcad-ul pune la dispoziție paletele *Symbolic* și *Calculus* pentru realizarea calculelor simbolice, care au aplicații atât în Algebră cât și în Analiză matematică.

În Mathematica, expresiile care implică necunoscute sunt introduse în același mod ca și cele ce conțin numere; evaluarea simbolică a acestora se face pe baza zonelor din paletele **Basic Math Assistant** și **Classroom Assistant**.

O ecuație algebrică (polinomială) este o ecuație de forma $P=Q$, P și Q fiind polinoame cu coeficienți în E , o mulțime de numere ($N, Z, Q, \mathbb{R}, C$).

Forma generală a unei ecuații algebrice de gradul n este:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}, a_n \neq 0.$$

Exponentul puterii celei mai mari a variabilei se numește grad al ecuației. O ecuație este liniară sau de gradul întâi dacă necunoscuta apare numai la puterea întâi. O ecuație de gradul n cu coeficienți reali și o necunoscută are întotdeauna n rădăcini (în general complexe).

Dacă ecuația conține mai multe variabile, atunci se formează pentru fiecare termen suma exponenților variabilelor și cea mai mare sumă astfel formată va fi gradul ecuației.

Într-o ecuație cu mai multe variabile trebuie stabilite care sunt variabilele adevărate și care sunt variabilele auxiliare (parametrii). Soluția unei astfel de ecuații conține parametrii și satisface ecuația pentru orice valoare admisă a parametrilor.

Toate ecuațiile care nu sunt algebrice se numesc transcendente. Ecuațiile transcendente importante sunt: ecuațiile exponențiale, ecuațiile logaritmice și ecuațiile trigonometrice.

Spre deosebire de ecuațiile algebrice pentru care se pot obține forme generale ale soluțiilor, pentru ecuațiile transcendente nu mai este posibil acest lucru. Deși nu există metode matematice generale de rezolvare pentru aceste ecuații, ele pot fi rezolvate grafic sau prin metode de aproximare.



Noțiunea de inecuație se definește precum noțiunea de ecuație, cu ajutorul expresiilor. Dacă două expresii E_1 și E_2 sunt legate printr-un operator de comparație, atunci se formează inecuațiile: $E_1 > E_2$, $E_1 \geq E_2$, $E_1 < E_2$, $E_1 \leq E_2$ sau $E_1 \neq E_2$. Constituie soluție a unei inecuații orice număr din domeniul de definiție, care substituit variabilei transformă o inecuație cu o variabilă într-o propoziție adevărată.

Dacă se cere rezolvarea simultană a m ecuații cu n variabile atunci înseamnă ca avem de rezolvat un sistem de m ecuații cu n variabile. Orice soluție a unui astfel de sistem este un vector cu n componente.

Un sistem neliniar este un sistem de forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}, f_i \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Mathcad	Mathematica
Reprezentarea ecuațiilor	
se folosește operatorul binar “=” ce are doi operanzi, partea stângă și partea dreaptă	se folosește operatorul binar “==” ce are doi operanzi, partea stângă și partea dreaptă
Reprezentarea inecuațiilor	
se utilizează operatorii	relaționali, ce au doi operanzi, partea stângă și partea dreaptă

În Mathematica se pot folosi simbolurile: “%” pentru a face referire la ultimul rezultat, “%%” pentru a desemna penultimul rezultat, și așa mai departe. Aceste notații nu pot fi folosite și în Mathcad.

Vom prezenta comparativ în Mathcad și respectiv Mathematica, aplicațiile calculului simbolic în Algebră, Analiză matematică, Trigonometrie.

A) Aplicații în Algebră ale calcului simbolic

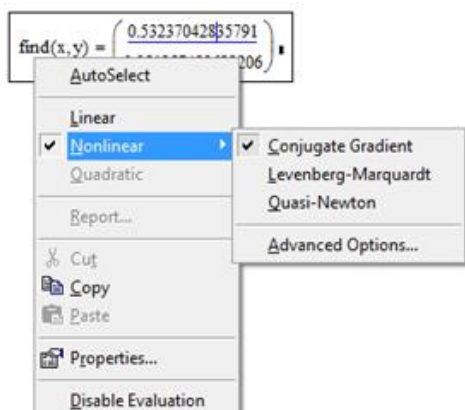
calcul simbolic efectuat în Mathcad	calcul simbolic efectuat în Mathematica
Afișarea sub formă de numere complexe	
din paleta <i>Symbolic</i> alegem butonul complex apoi butonul $\rightarrow$ din paleta <i>Symbolic</i>	ComplexExpand[expr]
Impunerea de restricții asupra variabilelor din expresia evaluată	
butonul assume din paleta <i>Symbolic</i>	Assuming[assum, expr]
Simplificarea simbolică unei expresii	
butonul simplify din paleta <i>Symbolic</i>	butonul Simplify din zona <i>Basic Commands</i> Simplify[expr]



	funcția <code>FullSimplify[expr]</code> din zona <i>Basic Commands</i> <code>Cancel[expr]</code> din zona <i>Basic Commands</i> simplifică o expresie rațională
Simplificarea simbolică unei expresii, presupunând că toate variabilele sunt pozitive	
nu există funcție predefinită	<code>PowerExpand[expression]</code>
Factorizarea unei expresii	
butonul <code>factor</code> din paleta <i>Symbolic</i>	butonul <code>Factor</code> din zona <i>Basic Commands</i> <code>Factor[poly]</code>
Expandarea unei expresii	
butonul <code>expand</code> din paleta <i>Symbolic</i>	butonul <code>Expand</code> din zona <i>Basic Commands</i> <code>Expand[expr]</code>
Scrierea unei expresii sub formă de fracție	
nu există funcție predefinită	butonul <code>Together</code> din zona <i>Basic Commands</i> <code>Together[expr]</code>
Descompunerea în fracții simple	
butonul <code>parfrac</code> din paleta <i>Symbolic</i>	butonul <code>Apart</code> din zona <i>Basic Commands</i> <code>Apart[expr]</code>
Scrierea unui polinom ca o compunere a două polinoame mai simple	
nu este posibil	<code>Decompose[poly, x]</code>
Determină polinomul caracteristic al unei matrice	
nu este posibil	<code>CharacteristicPolynomial[m, x]</code>
Realizează ortogonalizarea Gram Schmidt a unui sistem de vectori	
nu este posibil	<code>GramSchmidt[{v1,v2,...}]</code>
Determină minorii de ordin k ai unei matrice	
nu este posibil	<code>Minors[m, k]</code>
Colectează termenii asemenea dintr-o expresie	
butonul <code>collect</code> din paleta <i>Symbolic</i>	<code>Collect[expr, x]</code>
Determinarea coeficienților unui polinom scris sub formă de polinom factor	
butonul <code>coeffs</code> din paleta <i>Symbolic</i>	<code>CoefficientList[poly, var]</code>
Determinarea transpusei simbolice a unei matrice	
butonul $M^T \rightarrow$ din paleta <i>Symbolic</i>	butonul <code>Transpose</code> din zona <i>Basic Commands</i> <code>Transpose[list]</code>
Determinarea inversei simbolice a unei matrice	
butonul $M^{-1} \rightarrow$ din paleta <i>Symbolic</i>	butonul <code>Inverse</code> din zona <i>Basic Commands</i> <code>Inverse[m]</code>
Determinarea determinantului simbolic a unei matrice	
butonul $ M \rightarrow$ din paleta <i>Symbolic</i>	funcția <code>Det[m]</code> din zona <i>Basic Commands</i>
Rezolvarea ecuațiilor algebrice	
butonul <code>solve</code> , din paleta <i>Symbolic</i> sau <i>numeric</i> : utilizând funcția <code>polyroots</code> , al cărei argument este vectorul ce conține coeficienții ecuației algebrice, în ordinea descrescătoare a puterilor corespunzătoare variabilei din ecuația respectivă; funcția acceptă vectori de dimensiune ≤ 100	butonul <code>Solve</code> din zona <i>Basic Commands</i> <code>Solve[expr, vars]</code> <code>NSolve[expr, vars]</code> <code>Roots[lhs == rhs, var]</code> <code>NRoots[lhs == rhs, var]</code> <code>Reduce[expr, vars]</code>



	<code>FindInstance[expr, vars, dom, n]</code>
Rezolvarea ecuațiilor transcendente	
<u>Etapa 1.</u> Se reprezintă grafic funcția din membrul stâng al ecuației, pentru a vedea valorile în care funcția se anulează; aceasta valoare se determină cu ajutorul paletii <i>X-Y Trace</i> (fereastra apare dacă se apasă pe suprafața graficului butonul drept al mouse-ului și din lista care se deschide se alege opțiunea <i>Trace</i>). <u>Etapa 2.</u> Se determină o soluție a ecuației transcendente apelând funcția <i>root</i>.	<code>FindInstance[expr, vars, dom, n]</code>
Rezolvarea inecuațiilor	
butonul <i>solve</i> din paleta <i>Symbolic</i>	<code>Reduce[expr, vars]</code>
Rezolvarea sistemelor liniare	
butonul <i>solve</i>, din paleta <i>Symbolic</i> sau numeric: (a) folosind metoda matriceală: sistemul trebuie adus la forma matriceală $Ax = b$, unde A este o matrice patratică cu n linii și n coloane, nesingulară iar b este un vector coloană ce reprezintă termenul liber; vectorul soluție este $x = A^{-1}b$. (b) apelând la funcția <i>lsolve</i>, care are ca argumente matricea A și vectorul b. Funcția acceptă numai matrice patratică și vectori de aceeași dimensiune cu numărul de linii al matricei.	<code>LinearSolve[m, b]</code> <code>FindInstance[expr, vars, dom, n]</code> <code>Inverse[m]</code> <code>NSolve[expr, vars]</code>
Rezolvarea sistemelor neliniare	
Funcțiile <i>find</i> sau <i>minerr</i> <u>Etapa I.</u> Alegerea unui punct inițial, în apropierea soluției căutate. <u>Etapa II.</u> Se scrie cuvântul cheie <i>given</i>, care trebuie să precedă ecuațiile sistemului. <u>Etapa III.</u> Scrierea ecuațiilor sistemului plasând semnul egal din paleta <i>Boolean</i> între membrul stâng și membrul drept al ecuațiilor. <u>Etapa IV.</u> Inserarea funcției ce permite rezolvarea sistemului neliniar. Dacă plasăm cursorul pe aceasta funcție atunci prin acționarea butonului drept al mouse-ului se va afișa meniul de rezolvare al sistemului:	<code>Solve[expr, vars]</code> <code>FindInstance[expr, vars, dom, n]</code> <code>FindRoot[{eqn₁, eqn₂, ...}, {{x, x₀}, {y, y₀}, ...}]</code>



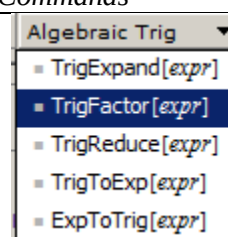


Se poate alege una din metodele : <i>Conjugate Gradient, Levenberg Marquardt</i> sau <i>Quasi-Newton</i> .	
--	--

B) Aplicații în Analiză matematică ale calcului simbolic

calcul simbolic efectuat în Mathcad	calcul simbolic efectuat în Mathematica
Derivarea simbolică a unei expresii în raport cu o variabilă x	
din paleta <i>Calculus</i> alegem butonul $\frac{d}{dx}$ apoi scriem expresia a cărei derivată ne propunem să o calculăm; evaluăm simbolic expresia accesând butonul $\rightarrow$ din paleta <i>Symbolic</i>	- accesăm butonul $\frac{d}{dx}$ sau $\frac{d}{dx}$ din fișa <i>Advanced</i> a zonei <i>Calculator</i> sau din zona <i>Basic Commands</i> - scriem $f'[x]$
Derivata de ordinul n a unei expresii	
se obține similar, cu deosebirea că se alege butonul $\frac{d^n}{dx^n}$	$D[expr, \{x, n\}]$ $f^{(n)}[x]$
Calculul diferențialei	
nu este posibil	$Dt[f]$
Calculul primitivei unei expresii	
este posibil cu ajutorul butonului $\int$ din paleta <i>Calculus</i> , urmat de butonul $\rightarrow$ din paleta <i>Symbolic</i>	$\int dx$ $Integrate[expr, x]$
Calcularea limitelor	
butonul $\lim_{x \rightarrow a}$ din paleta <i>Calculus</i>	$Limit[expr, var \rightarrow value]$ rezultă prin accesarea butonului Limit din zona <i>Basic Commands</i>
Calcularea limitelor laterale	
butoanele $\lim_{x \rightarrow a^+}$, $\lim_{x \rightarrow a^-}$ din paleta <i>Calculus</i> corespund limitelor la dreapta respectiv la stânga	$Limit[expr, x \rightarrow x_0, Direction \rightarrow 1]$ limita la stânga $Limit[expr, x \rightarrow x_0, Direction \rightarrow -1]$ limita la dreapta
Determinarea sumei unei serii	
butonul $\sum_{n=1}^m$ din paleta <i>Calculus</i> , urmat de butonul $\rightarrow$ din paleta <i>Symbolic</i>	butonul $\sum_{n=1}^m$ din zona <i>Basic Commands</i> $Sum[f, \{i, i_{max}\}]$
Calculul produselor formale	
butonul $\prod_{n=1}^m$ din paleta <i>Calculus</i> , urmat de butonul $\rightarrow$ din paleta <i>Symbolic</i>	butonul $\prod_{n=1}^m$ din zona <i>Basic Commands</i> $Product[f, \{i, i_{max}\}]$
Dezvoltarea în serie de puteri	
butonul series din paleta <i>Symbolic</i>	$Series[f, \{x, x_0, n\}]$ din zona <i>Basic Commands</i>
Determinarea valorilor extreme ale unei funcții	
nu este posibil	FindMaximum[expr, {var, estimate}] din zona <i>Basic Commands</i> FindMinimum[expr, {var, estimate}] din zona <i>Basic Commands</i>

C) Aplicații în Trigonometrie ale calcului simbolic





calcul simbolic efectuat în Mathcad	calcul simbolic efectuat în Mathematica
Factorizarea unei expresii trigonometrice	
nu este posibil	funcția <code>TrigFactor[expr]</code> din zona <i>Basic Commands</i>
Expandarea unei expresii trigonometrice	
nu este posibil	<code>TrigExpand[expr]</code>
Simplificarea unei expresii trigonometrice	
nu este posibil	<code>TrigReduce[expr]</code>
Convertește expresii trigonometrice în expresii exponențiale	
nu este posibil	<code>TrigToExp[expr]</code>
Convertește expresii exponențiale în expresii trigonometrice	
nu este posibil	<code>ExpToTrig[expr]</code>

L2.2. Calcul simbolic în Mathcad și Mathematica cu aplicații în Algebră

Exemplul L2.1. Simplificați expresia

$$E = \frac{3^{n+2} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+1}}{3^{n+1} \cdot 5^n + 2 \cdot 3^{n+1} \cdot 5^n}.$$

Mathcad: $\frac{3^{n+2} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+1}}{3^{n+1} \cdot 5^n + 2 \cdot 3^{n+1} \cdot 5^n} \text{ simplify } \rightarrow \frac{14}{9}$

Mathematica:

```
In[15]:= Simplify[(3^(n+2) * 5^n + 3^n * 5^(n+1)) / (3^(n+1) * 5^n + 2 * 3^(n+1) * 5^n)]
Out[15]= 14/9
```

⌋

Exemplul L2.2. Calculați suma

$$S_n = 2 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \dots + \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right), n \in \mathbb{N}.$$

Mathcad: $\sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \text{ simplify } \rightarrow n + 2 - 2^{(1-n)}$

Mathematica:

```
In[17]:= Simplify[Sum[1 + 1/2^(k-1), {k, 1, n}]]
Out[17]= 2 - 2^(1-n) + n
```

⌋



Exemplul L2.3. Calculați determinantul, transpusa și inversa simbolică pentru următoarea matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Mathcad:

$$A(x) := \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

$$|A(x)| \rightarrow \cos(x)^2 + \sin(x)^2 \text{ simplify } \rightarrow 1 \quad A(x)^T \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

$$A(x)^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\cos(x)}{(\cos(x)^2 + \sin(x)^2)} & \frac{\sin(x)}{(\cos(x)^2 + \sin(x)^2)} \\ \frac{-\sin(x)}{(\cos(x)^2 + \sin(x)^2)} & \frac{\cos(x)}{(\cos(x)^2 + \sin(x)^2)} \end{bmatrix}$$

Mathematica:

```
In[18]:= A = {Cos[x] -Sin[x]
              Sin[x] Cos[x]}
Out[18]= {{Cos[x], -Sin[x]}, {Sin[x], Cos[x]}}

In[20]:= Simplify[Det[A]]
Out[20]= 1

In[21]:= Transpose[A]
Out[21]= {{Cos[x], Sin[x]}, {-Sin[x], Cos[x]}}

In[23]:= Simplify[Inverse[A]]
Out[23]= {{Cos[x], Sin[x]}, {-Sin[x], Cos[x]}}
```

Exemplul L2.4. Să se factorizeze expresia

$$E = x^3 + yx^2 - 2\sqrt{3}x^2y - 2\sqrt{3}xy^2 + 3y^2x + 3y^3.$$

Mathcad:

$$x^3 + y \cdot x^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x^2 \cdot y - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot y^2 + 3 \cdot y^2 \cdot x + 3 \cdot y^3 \text{ factor } \rightarrow (x + y) \cdot (x - \sqrt{3} \cdot y)^2$$

Mathematica:

```
In[36]:= Factor[x^3 + y*x^2 - 2*sqrt(3)*x^2*y - 2*sqrt(3)*x*y^2 + 3*y^2*x + 3*y^3, Extension -> Automatic]
Out[36]= (x + y) (-x + sqrt(3) y)^2
```



Exemplul L2.5. Colectați coeficienții expresiei

$$xy + x^2y^3 + x^3y + y - y^2$$

în raport cu variabila y .

Mathcad:

$$x \cdot y + x^2 \cdot y^3 + x^3 \cdot y + y - y^3 \text{ collect, } y \rightarrow (x^2 - 1) \cdot y^3 + (x + x^3 + 1) \cdot y$$

Mathematica:

In[38]:= Collect[x*y + x^2*y^3 + x^3*y + y - y^3, y]

Out[38]:= (1 + x + x^3) y + (-1 + x^2) y^3

]

Exemplul L2.6. Expandați expresia:

$$E = (x^2\sqrt{2} - x\sqrt{3} + \sqrt{5})(x^2\sqrt{2} + x\sqrt{3} + \sqrt{5}) - (x^2\sqrt{2} + \sqrt{5})^2.$$

Mathcad:

$$(x^2 \cdot \sqrt{2} - x \cdot \sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot (x^2 \cdot \sqrt{2} + x \cdot \sqrt{3} + \sqrt{5}) - (x^2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{5})^2 \text{ expand} \rightarrow -3 \cdot x^2$$

Mathematica:

In[40]:= Expand[(x^2*sqrt(2) - x*sqrt(3) + sqrt(5)) * (x^2*sqrt(2) + x*sqrt(3) + sqrt(5)) - (x^2*sqrt(2) + sqrt(5))^2]

Out[40]:= -3 x^2

]

Exemplul L2.7. Se dau polinoamele:

$$P(x) = x^6 - x^5 - 3x^4 + x^3 - 4x - 3, \quad Q(x) = 2x^4 - 6x^2 - 8x - 6, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Să se transforme fracția $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ într-o fracție ireductibilă.

Mathcad:

$$\frac{x^6 - x^5 - 3x^4 + x^3 - 4x - 3}{2x^4 - 6x^2 - 8x - 6} \text{ convert, parfrac, } x \rightarrow \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{(1 + 2 \cdot x)}{(2 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2)}$$

Mathematica:

In[47]:= Apart[(x^6 - x^5 - 3*x^4 + x^3 - 4*x - 3) / (2*x^4 - 6*x^2 - 8*x - 6), x]

Out[47]:= -x/2 + x^2/2 + 1/(2*(1 + x + x^2))

]



Exemplul L2.8. Să se determine coeficienții polinomului

$$P(x) = (x\sqrt{3} - 2)(x\sqrt{3} + 2).$$

Mathcad:

$$(x\sqrt{3} - 2) \cdot (x\sqrt{3} + 2) \text{ coeffs } , x \rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Mathematica:

```
In[48]:= CoefficientList[(x*sqrt(3) - 2)*(x*sqrt(3) + 2), x]
Out[48]:= {-4, 0, 3}
```

⌋

Exemplul L2.9. Să se afișeze sub formă de număr complex: $(z + 2i)^2(z + 3i)^3$.

Mathcad:

$$(z + 2i)^2 \cdot (z + 3i)^3 \text{ complex} \rightarrow z^5 - 67z^3 + 216z + 1i(13z^4 - 171z^2 + 108)$$

Mathematica:

```
In[54]:= ComplexExpand[(z + 2*i)^2*(z + 3*i)^3]
Out[54]:= 216 z - 67 z^3 + z^5 + i (108 - 171 z^2 + 13 z^4)
```

⌋

Exemplul L2.10. Să se evalueze expresia următoare :

$$\frac{|x-1| + |x-3|}{|x-2|} \text{ pentru } x \leq 1.$$

Mathcad:

$$\frac{|x-1| + |x-3|}{|x-2|} \text{ assume, } x \leq 1 \rightarrow \frac{(4-2x)}{(2-x)} \text{ simplify} \rightarrow 2$$

Mathematica:

```
In[56]:= Assuming[x <= 1, Simplify[(Abs[x - 1] + Abs[x - 3]) / Abs[x - 2]]]
Out[56]:= 2
```

⌋



L2.3. Calcul simbolic în Mathcad și Mathematica cu aplicații în Analiză matematică

Exemplul L2.11. Calculați următoarele limite:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

Mathcad:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2 \cdot n)!}{(n!)^2}} \rightarrow 4$$

Mathematica:

```
In[1]:= Limit[ $\sqrt[n]{\frac{(2 * n)!}{(n!)^2}}$ , n -> ∞]
```

Out[13]= 4

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + n^2} (\sin 1 + \dots + \sin n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + n^2} \cdot \sum_{k=1}^n \sin k$

Mathcad:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + n^2} \cdot \sum_{k=1}^n \sin(k) \rightarrow 0$$

Mathematica:

```
In[13]:= Limit[ $\frac{1}{n + n^2} * \sum_{k=1}^n \sin[k]$ , n -> ∞]
```

Out[13]= 0

c) $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} e^{\frac{1}{x}}$

Mathcad:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$$



Mathematica:

```
In[14]:= Limit[E^(1/x), x -> 0, Direction -> 1]
Out[14]= 0
```

d) $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} e^{\frac{1}{x}}$

Mathcad:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \rightarrow \infty$$

Mathematica:

```
In[15]:= Limit[E^(1/x), x -> 0, Direction -> -1]
Out[15]= ∞
```

Exemplul L2.12. Să se determine raza de convergență pentru următoarea serie de puteri:

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n+1}{n^2 + n + 1} x^n$$

Pentru a determina raza de convergență a unei serii de puteri $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ putem vom folosi una

din formulele: $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ sau $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$.

Mathcad:

$$a(n) := (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2 + n + 1} \quad \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a(n+1)}{a(n)} \right|} \rightarrow 1$$

Mathematica:

```
In[4]:= a[n_] := (-1)^n * (n+1)/(n^2 + n + 1);
In[5]:= 1/Limit[Abs[a[n+1]/a[n]], n -> ∞]
Out[5]= 1
```



Exemplul L2.13. Calculați suma seriei:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)!}$$

Mathcad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)!} \rightarrow 2$$

Mathematica:

$$\text{In}[8]:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)!}$$

Out[8]= 2



Exemplul L2.14. Calculați produsul

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{31}{32} \cdot \dots = \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{2k^2} \right)$$

Mathcad:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2 \cdot k^2} \right) \rightarrow \frac{1}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2}$$

Mathematica:

$$\text{In}[10]:= N\left[\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2 \cdot k^2} \right), 4\right]$$

Out[10]= 0.3582



Exemplul L2.15. Scrieți primii șapte termeni din dezvoltarea în serie de puteri a funcției:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Mathcad:

$$f(x) := \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad f(x) \text{ series, } x = 0,7 \rightarrow x + \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{5} \cdot x^5$$



Mathematica:

In[12]:= Series[$\frac{1}{2} \star \text{Log}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$, {x, 0, 6}]

Out[12]= $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O[x]^7$

Exemplul L2.16. Calculați:

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}} dx.$$

Mathcad:

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}} dx \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

Mathematica:

In[20]:= $\int \frac{1}{x^2} \star \text{Sin}\left[\frac{1}{x}\right] \star e^{\frac{1}{x}} dx$

Out[20]= $\frac{1}{2} e^{\frac{1}{x}} \left(\text{Cos}\left[\frac{1}{x}\right] - \text{Sin}\left[\frac{1}{x}\right] \right)$

L2.4. Rezolvarea ecuațiilor și a sistemelor de ecuații în Mathcad și Mathematica

Exemplul L2.17. Determinați rădăcinile polinomului:

$$P(X) = X^4 + X^3 - 10X^2 - 34X - 26$$

Mathcad:

$$v := \begin{pmatrix} -26 \\ -34 \\ -10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -1.934 - 1.391i \\ -1.934 + 1.391i \\ -1.142 \\ 4.01 \end{pmatrix}$$



Mathematica:

```
In[25]:= N[Solve[x^4 + x^3 - 10 * x^2 - 34 * x - 26 == 0, x], 4]
```

```
Out[25]= {{x -> -1.934 - 1.391 i}, {x -> -1.934 + 1.391 i}, {x -> -1.142}, {x -> 4.010}}
```

Exemplul L2.18. Rezolvați ecuațiile algebrice:

$$a) \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6}$$

Mathcad:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6} \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sau

Mathcad:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{5}{6} \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mathematica:

```
In[76]:= NSolve[x^4 + x^3 - 10 * x^2 - 34 * x - 26 == 0, x]
```

```
Out[76]= {{x -> -1.93415 - 1.3911 i}, {x -> -1.93415 + 1.3911 i}, {x -> -1.14216}, {x -> 4.01047}}
```

```
In[78]:= NRroots[x^4 + x^3 - 10 * x^2 - 34 * x - 26 == 0, x]
```

```
Out[78]= x = -1.93415 - 1.3911 i || x = -1.93415 + 1.3911 i || x = -1.14216 || x = 4.01047
```

```
In[88]:= N[FindInstance[x^4 + x^3 - 10 * x^2 - 34 * x - 26 == 0, x, Complexes, 4], 5]
```

```
Out[88]= {{x -> -1.1422}, {x -> 4.0105}, {x -> -1.9342 - 1.3911 i}, {x -> -1.9342 + 1.3911 i}}
```

```
In[90]:= N[Reduce[x^4 + x^3 - 10 * x^2 - 34 * x - 26 == 0, x], 5]
```

```
Out[90]= x = -1.1422 || x = 4.0105 || x = -1.9342 - 1.3911 i || x = -1.9342 + 1.3911 i
```

$$b) \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-1} + \frac{2x^2}{(x-3)(x-1)} = 0$$

Mathcad:

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-1} + \frac{2 \cdot x^2}{(x-3) \cdot (x-1)} \text{ solve, } x \rightarrow -2$$



Mathematica:

```
In[22]:= Solve[ $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-1} + \frac{2 \cdot x^2}{(x-3) \cdot (x-1)} == 0, x]$ 
```

```
Out[22]:= {{x -> -2}}
```

c) $x^2 - 2(m+2)x + m^2 - 1 = 0$ în raport cu variabila x .

Mathcad:

$$x^2 - 2 \cdot (m+2) \cdot x + m^2 - 1 \text{ solve, } x \rightarrow \begin{bmatrix} m+2 + (4 \cdot m+5)^{\frac{1}{2}} \\ m+2 - (4 \cdot m+5)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Mathematica:

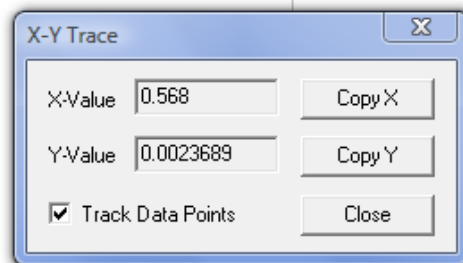
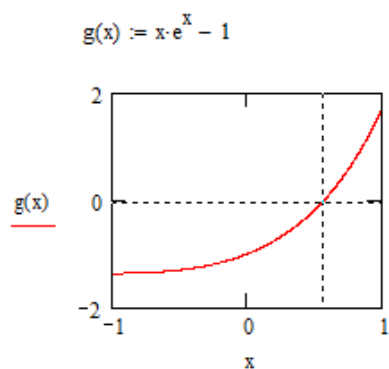
```
In[69]:= Solve[ $x^2 - 2 \cdot (m+2) \cdot x + m^2 - 1 == 0, x]$ 
```

```
Out[69]:= {{x -> 2 + m -  $\sqrt{5 + 4 m}$ }, {x -> 2 + m +  $\sqrt{5 + 4 m}$ }}
```

Exemplul L2.19. Rezolvați ecuațiile transcendente:

a) $xe^x - 1 = 0$

Mathcad:



$$x := 0.568$$

$$\text{root}(g(x), x, 0, 0.6) = 0.5671433$$



Observația L2.20. 1) Apelând comanda *solve* nu putem rezolva ecuația transcendentă.

$$u \cdot e^u - 1 \text{ solve, } u \rightarrow W(1)$$

2) În cazul în care ecuația transcendentă are mai multe soluții se determină toate valorile în care funcția se anulează și se apelează funcția *root* pentru fiecare dintre aceste valori.

3) Anumite ecuații transcendente pot fi rezolvate folosind comanda *solve*, însă acest lucru nu este valabil pentru toate astfel de ecuații.

Mathematica:

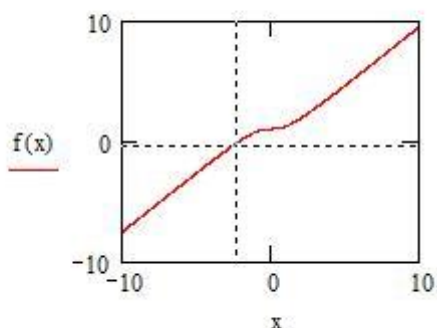
```
In[94]:= N[FindInstance[x * e^x - 1 == 0, x, Reals, 4], 6]
```

```
Out[94]:= {{x -> 0.567143}}
```

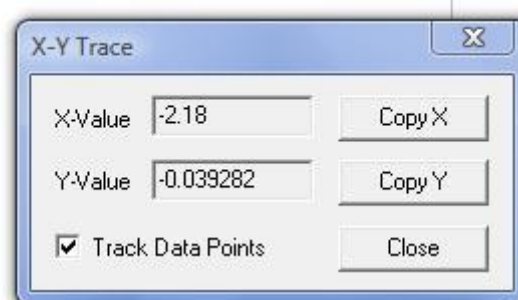
b) $1 + x = \arctg x$

Mathcad:

$$f(x) := 1 + x - \operatorname{atan}(x)$$



$$\operatorname{root}(f(x), x, -3, 3) = -2.132268$$



Mathematica:

```
In[27]:= N[FindInstance[1 + x == ArcTan[x], x, Reals], 7]
```

```
Out[27]:= {{x -> -2.132268}}
```



Exemplul L2.21. Rezolvați inecuațiile:

a) $(x^2 + x + 1)(2x - 7) > 0$

Mathcad:

$$(x^2 + x + 1) \cdot (2x - 7) > 0 \text{ solve, } x \rightarrow \frac{7}{2} < x$$

Mathematica:

In[97]:= Reduce[(x^2 + x + 1) * (2 * x - 7) > 0, x]

Out[97]= $x > \frac{7}{2}$

9

b) $|x + 1| \cdot (2x + 3) - 3 < 0$

Mathcad:

$$|x + 1| \cdot (2 \cdot |x + 3| - 3) < 0 \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} x < \frac{-3}{2} \\ \frac{-9}{2} < x \end{pmatrix}$$

Mathematica:

In[3]:= Reduce[Abs[x + 1] * (2 * Abs[x + 3] - 3) < 0, x, Reals]

Out[3]= $-\frac{9}{2} < x < -\frac{3}{2}$

9

Exemplul L2.22. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 14x_1 + x_2 = 13 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = -3 \\ -x_2 + 14x_3 - 2x_4 = -15 \\ -2x_3 + 5x_4 = 7. \end{cases}$$



Mathcad:

$$A := \begin{pmatrix} 14 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ -15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$x := \text{lsolve}(A, b)$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mathematica:

In[6]:= Solve[{14*x1 + x2 == 13, x1 + 5*x2 - x3 == -3, -x2 + 14*x3 - 2*x4 == -15, -2*x3 + 5*x4 == 7}, {x1, x2, x3, x4}]

Out[6]:= {{x1 -> 1, x2 -> -1, x3 -> -1, x4 -> 1}}

sau

Mathematica:

$$\text{In[7]:= } A = \begin{pmatrix} 14 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ -15 \\ 7 \end{pmatrix};$$

In[12]:= LinearSolve[A, b]

Out[12]:= {{1}, {-1}, {-1}, {1}}

Exemplul L2.23. Determinați matricea A astfel încât:

$$(2A - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix})^T = 3A^T + (2 \ 1 \ -1)^T.$$

Algoritmul de rezolvare:

Pasul 1. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.

Pasul 2. Calculăm

$$X = (2A - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix})^T - 3A^T - (2 \ 1 \ -1)^T.$$

Pasul 3. Determinăm a, b, c astfel încât $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Mathcad:

$$A(a, b, c) := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$U(a, b, c) := 2 \cdot A(a, b, c) - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot A(a, b, c) - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$U(a, b, c) \text{ solve, } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow (-5 \quad -7 \quad 1)$$

Mathematica:

```
In[1]:= A = {a, b, c};
In[3]:= U = 2 * A - 3 * {1, 2, 0} - 3 * A - {2, 1, -1}
Out[3]= {-5 - a, -7 - b, 1 - c}
In[19]:= Solve[U == {0, 0, 0}, {a, b, c}]
Out[19]= {{a -> -5, b -> -7, c -> 1}}
```

Exemplul L2.24. Rezolvați sistemele neliniare:

a.
$$\begin{cases} x - \sin(x + y) = 0 \\ y - \cos(x - y) = 0 \end{cases} \text{ (considerând ca punct inițial } (3,1))$$

Mathcad:

$$x := 3 \quad y := 1$$

Given

$$x - \sin(x + y) = 0 \quad y - \cos(x - y) = 0$$

$$\text{find}(x, y) = \begin{pmatrix} 0.935 \\ 0.998 \end{pmatrix}$$

Mathematica:

```
In[13]:= FindRoot[{x - Sin[x + y] == 0, y - Cos[x - y] == 0}, {{x, 3}, {y, 1}}]
Out[13]= {x -> 0.935082, y -> 0.99802}
```

b)
$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0 \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0 \end{cases} \text{ (considerând ca punct inițial } (0.5, 0.5))$$



Mathcad:

$$x := 0.5 \quad y := 0.5$$

Given

$$x^3 + y^3 - 6 \cdot x + 3 = 0 \quad x^3 - y^3 - 6 \cdot y + 2 = 0$$

$$\text{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 0.532 \\ 0.351 \end{pmatrix}$$

Mathematica:

```
In[113]:= NSolve[{x^3 + y^3 - 6 * x + 3 == 0, x^3 - y^3 - 6 * y + 2 == 0}, {x, y}, Reals]
```

```
Out[113]:= {{x -> -2.4238, y -> -1.48932}, {x -> 0.53237, y -> 0.351257}, {x -> 1.88272, y -> 1.17513}}
```

```
In[116]:= N[FindInstance[x^3 + y^3 - 6 * x + 3 == 0 && x^3 - y^3 - 6 * y + 2 == 0, {x, y}, Reals, 4], 6]
```

```
Out[116]:= {{x -> -2.42380, y -> -1.48932}, {x -> 0.532370, y -> 0.351257}, {x -> 1.88272, y -> 1.17513}}
```

L2.5. Exerciții propuse

1. Să se calculeze expresiile:

$$(a) \sum_{k=1}^n \frac{2k+3}{k(k+1)(k+2)}$$

$$(b) \prod_{i=1}^n \left[1 - \frac{1}{(i+1)^2} \right]$$

2. Să se dezvolte determinantul

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} a+b & -a+b-c & b+c \\ a-b-c & a+b & a+c \\ a+c & b+c & -a-b+c \end{vmatrix},$$

punându-se rezultatul sub formă de produs.



3. Fie

$$p_1(x) = x + a, \quad p_2(x) = x^2 + bx + c.$$

Calculați determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & p_1(x_1) & p_2(x_1) \\ 1 & p_1(x_2) & p_2(x_2) \\ 1 & p_1(x_3) & p_2(x_3) \end{vmatrix}$$

scriind rezultatul sub formă de produs.

4. Se consideră polinomul $P(X) = X^5 - 2X^3 + 1$.

- (a) Să se determine coeficienții polinomului $P(X)$
- (b) Să se colecteze coeficienții expresiei $P(X+Y)$ în raport cu variabila Y
- (c) Să se descompună în factori polinomul $P(X)$
- (d) Să se scrie sub formă de număr complex $P(1+i)$.

5. Se consideră expresia

$$E(x) = mx + n, \quad m, n \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0.$$

Calculați:

$$E(x-1) + 2E(x+2) - 3E(x+1).$$

6. Se dă matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Să se demonstreze că matricea A satisface ecuația matriceală

$$A^2 - (a+d) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = 0_2$$

7. Fie matricele pătrate

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculați:

$$(A+B)^{100}.$$

8. Calculați următoarele limite:



$$(a) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1} e^{\frac{1}{1-x}}$$

$$(b) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1} e^{\frac{1}{1-x}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \prod_{k=1}^n \cos(kx)}{x^2}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} \right)^x.$$

9. Simplificați expresiile:

$$(a) F = \left(\frac{x^2}{x+2} - \frac{x^3}{x^2 + 4x + 4} \right) : \left(\frac{x}{x+2} - \frac{x^2}{x^2 - 4} \right)$$

$$(b) G = \frac{x^2 + x \sin \frac{\pi}{4} - 3}{x \sin \frac{\pi}{4} - 1}.$$

10. Dezvoltați în serie Taylor funcția:

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}},$$

în jurul punctului $x = 0.5$, pentru $n = 4$.

11. Se consideră funcția

$$f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right).$$

Să se calculeze expresia:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

12. Să se calculeze următoarele derivate:

$$(a) f(x) = \cos^2 \sqrt{x}; \quad f'(x) = ?$$

$$(b) f(x) = x \cdot \arctg x - \ln(1 + x^2), \quad f''(x) = ?$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}, \quad f^{(11)}(x) = ?$$



13. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi și al doilea pentru funcția

$$(a) f(x, y) = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$$

$$(b) f(x, y, z) = y^{x^z}, \quad x, y > 0.$$

14. Fiind dat polinomul

$$P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

să se calculeze suma:

$$S = \frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2} + \frac{1}{x_3 - 2} + \frac{1}{x_4 - 2},$$

unde $x_i, i = \overline{1, 4}$ sunt rădăcinile ecuației $P(x) = 0$.

15. Rezolvați ecuațiile transcendente:

$$(a) x - 0.2 = \ln(1+x)$$

$$(b) e^x = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$(c) \sin x + \cos x = x$$

16. Rezolvați inecuația:

$$\frac{x\sqrt{3}+1}{3x^2+2x\sqrt{3}+3} \leq 0.$$

17. Rezolvați sistemul de ecuații următor în raport cu x, y, z :

$$(a) \begin{cases} x + m \cdot y + 2z = -1 \\ -m \cdot x + y - z = m^2, m \in R \\ x - 3y + m \cdot z = m \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 3x + 4y + mz = 0 \\ 4x + my + 3z = 6 \\ mx + 3y + 4z = 3 + m \end{cases}, m \in \mathbb{R}.$$

18. Determinați a, b și c astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x + ay + cz = 0 \\ bx + cy - 3z = 1 \\ ax + 2y + bz = 5 \end{cases}$$

are soluția $x = 3, y = -1, z = 2$.



19. Determinați matricea A astfel încât:

$$\left(A + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

20. Rezolvați sistemele neliniare:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} x_1 + 3 \lg x_1 - x_2^2 = 0 \\ 2x_1^2 - x_1 x_2 - 5x_1 + 1 = 0 \end{cases} \quad (\text{considerând ca punct inițial } (3, 2)) \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{considerând ca punct inițial } (0.5, 0.5, 0.5)). \end{aligned}$$

21. Calculați suma:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & S_n = 1^3 + 4^3 + 7^3 + \dots + (3n-2)^3, \quad n \in \mathbb{N} \\ \text{(b)} \quad & S = \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}. \end{aligned}$$

22. Să se determine raza de convergență pentru următoarele serii de puteri:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{2^n + 3^n} \\ \text{(b)} \quad & \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2 + n} x^n \\ \text{(c)} \quad & \sum_{n \geq 1} n^{\ln^2 n} \cdot x^n \end{aligned}$$

23. Calculați suma seriei:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{n \geq 1} \frac{n^2 (3^n - 2^n)}{6^n} \\ \text{(b)} \quad & \sum_{n \geq 1} \frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)} \\ \text{(c)} \quad & \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ \text{(d)} \quad & \sum_{n \geq 1} \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2} \end{aligned}$$



$$(e) \sum_{n \geq 1} \ln \left[1 + \frac{2}{n(n+3)} \right].$$

24. Calculați:

$$(a) \int \frac{x^2}{(x \cos x - \sin x)^2} dx$$

$$(b) \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$(c) \int x^{-4} (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$(d) \int \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) dx.$$

25. Determinați rădăcinile polinomului:

$$(a) P(X) = X^4 - 2X^3 - X + 2$$

$$(b) P(X) = X^7 - 2X^6 + 3X^5 - 4X^4 + 5X^3 - 6X^2 + 7X - 8.$$

26. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații liniare:

$$(a) \begin{cases} 6x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 9x_4 = -5 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 8x_1 - x_2 - 2x_3 = 2.3 \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 = -0.5 \\ -x_1 + 6x_3 + 2x_4 = -1.2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 12x_4 = 3.7 \end{cases}$$

L2.6. Bibliografie

1. M. L. Abell, J. P. Braselton, *Mathematica by Example*, Elsevier Academic Press, 2004.
2. G. Anastassiou, I. Iatan, *Intelligent Routines: Solving Mathematical Analysis with Matlab, Mathcad, Mathematica and Maple*, Springer, 2013.
3. G. Anastassiou, I. Iatan, *Intelligent Routines II: Solving Linear Algebra and Differential Geometry with Sage*, Springer, 2014.

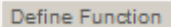


4. O. Cira, *Lecții de Mathcad 2001 Professional*, ed. Grupul microInformatica, Cluj-Napoca, 2003.
5. I. Iatan, *Îndrumător de laborator în Matlab 7.0*, ed. Conspress, București, 2009.
6. I. Popa, *Analiză matematică. Calcul diferențial*, ed. MatrixRom, București, 2000.
7. V. Postelnicu, S. Coatu, *Mică enciclopedie matematică*, ed. Tehnică, București, 1980.
8. I. Shingareva, C. Lizárraga- Celaya, *Maple and Mathematica. A problem solving approach for Mathematics*, Springer- Verlag, 2007.
9. Gh. Sirețchi, *Calcul diferențial și integral*, vol. 2, ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1985.



L3. Lecția de Laborator 3. Reprezentări grafice 2D în Mathcad și Mathematica

L3.1. Breviar teoretic

Mathcad		Mathematica	
Definirea unei funcții de o variabilă			
Se scrie f(x):=		Se scrie f[x_]:= sau se accesează butonul  din paleta <i>Basic Math Assistant</i> , zona <i>Calculator</i> , fișa <i>Advanced</i>	
Scrierea de funcții pe ramuri			
Sintaxa este f(x):= urmată de acționarea butonului  din paleta <i>Programming</i>		se accesează butoanele  și  , ambele din paleta <i>Basic Math Assistant</i> , zona <i>Calculator</i> , fișa <i>Advanced</i>	
Evaluarea valorii unei funcții sau expresii			
f(a)	f(a,b)	f[a]	f[a,b]
expr substitute, x = a →	expr substitute, x = a, y = b →	expr/.{x->a}	expr/.{x->a, x->b}

Sistemul de coordonate cartezian este definit de reperul xOy din plan, constituit din punctul O numit origine și perechea de axe ortogonale (Ox, Oy) , cu originea O comună. Reperul este folosit pentru a determina în mod unic un punct M în plan, prin perechea de numere (x_0, y_0) , x_0 fiind *abscisa* iar y_0 *ordonata* punctului M . Pentru a defini aceste coordonate, se specifică două drepte perpendiculare și unitatea de lungime, care este marcată pe cele două axe.

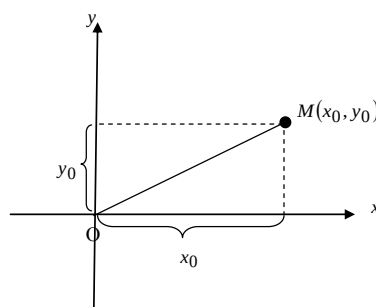


Fig. L3.1. Sistemul de coordonate carteziene

Sistemul de coordonate carteziene permite descrierea formelor geometrice prin ecuații algebrice, ecuații care sunt satisfăcute de mulțimea coordonatele punctelor de pe forma geometrică respectivă.



Pentru a realiza în Mathcad reprezentarea grafică în coordonate carteziene a funcțiilor de o singură variabilă se parcurg următoarele etape:

1. se definește funcția ce urmează să fie reprezentată
2. se alege intervalul pe care vrem să realizăm reprezentarea
3. se împarte intervalul în părți egale de mărime δ , rezultând valori discrete în care se vor calcula valorile funcției
4. se reprezintă punctele rezultate la pasul 3; reprezentarea acestor puncte va furniza graficul funcției.

Caracteristicile graficului pot fi modificate din paleta *Formatting Currently Selected X-Y Plot* care se deschide dacă se dă dublu click pe regiunea ce conține graficul.

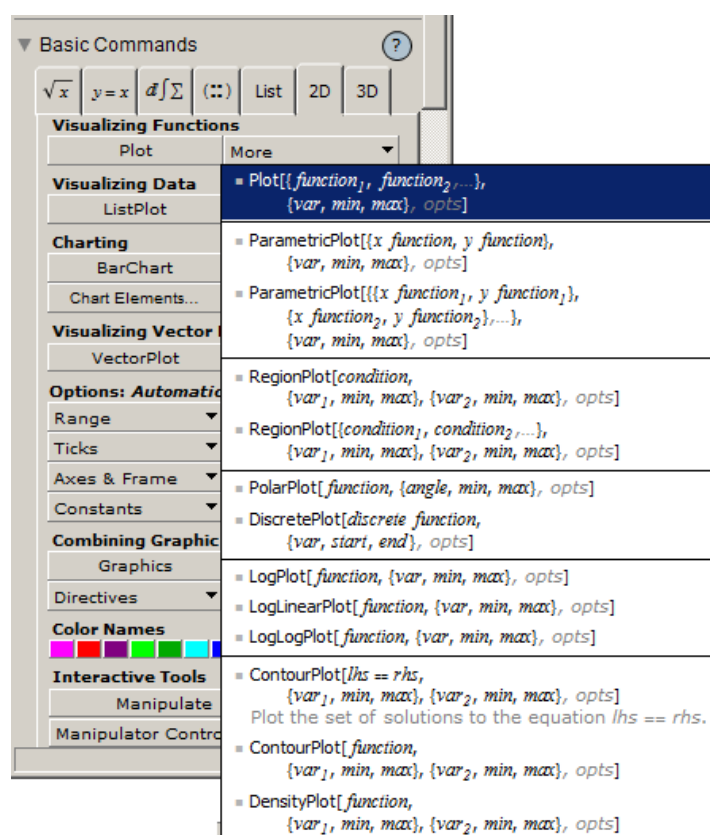
Reprezentarea grafică 2D în coordonate carteziene folosind Mathematica se poate realiza atât pe baza funcțiilor specializate în acest sens din zona *Basic Commands* a paletelor *Basic Math Assistant*, precum:

1. **Plot[f[x],{x,a,b}]** reprezintă grafic funcția f pe intervalul $[a,b]$;
2. **Plot[{f[x],g[x]},{x,a,b}]** reprezintă grafic funcțiile f și g pe intervalul $[a,b]$;
3. **ContourPlot[y==f[x]],{x,a,b},{y,c,d}]** reprezintă grafic funcția f , definită explicit; cât și
4. **ImplicitPlot[f[x,y]==0,g[x,y]==0,{x,a,b}]** utilizată pentru reprezentarea grafică a funcțiilor f și g definite implicit;
5. **ParametricPlot[{f[t], g[t]}, {t, tmin, tmax}]** ce permite reprezentarea unei curbe dată sub formă parametrică.

Mathematica oferă și posibilitatea reprezentării grafice a unei regiuni, definită de niște inegalități, cu ajutorul funcției:

`RegionPlot[pred, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]`,

care nu are nici un corespondent în Mathcad.





În Mathematica, caracteristicile unui grafic pot fi modificate prin: selectarea graficului, acționarea butonului drept al mouse-ului, alegerea opțiunii *Drawing Tools* din lista care se deschide.

Pe lângă sistemul cartezian există și sistemul de coordonate polare (Fig. L3.2), care permite specificarea poziției unui punct în plan. Un sistem de coordonate polare se definește printr-un punct O numit *pol* sau *origine* și printr-o semiaxă dusă prin pol, numită *axă polară*.

Poziția unui punct din plan M este determinată dacă se cunosc:

- distanța $\rho = OM$ de la pol la punctul considerat, numită *rază vectoare* a punctului M (ia numai valori pozitive),
- unghiul $\varphi \in [0, 2\pi]$ pe care-l face axa polară cu semidreapta OM , ales în sens trigonometric, numit *fază* sau *amplitudine*.

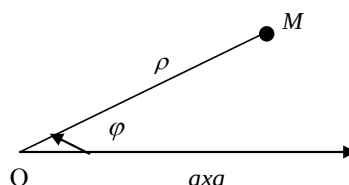


Fig. L3.2. Sistemul de coordonate polare

Este posibilă transformarea unui sistem de coordonate polare într-un sistem de coordonate carteziene și invers. Dacă ambele sisteme de coordonate au aceeași origine și axa Ox comună, atunci un punct M care are coordonatele (ρ, φ) în sistemul de coordonate polare va avea coordonatele (x, y) în sistemul de coordonate carteziene, între acestea existând relațiile:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}, \quad \rho > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi];$$

deci

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Mathcad	Mathematica
Reprezentarea grafică în coordonate polare	
butonul  din paleta <i>Graph</i>	funcția <code>PolarPlot[r, {θ, θ_{min}, θ_{max}}]</code> din zona <i>Basic Commands</i>



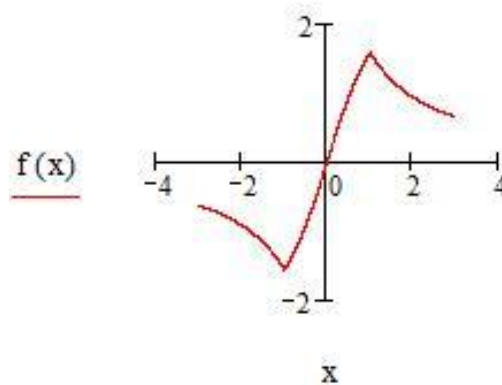
L3.2. Reprezentarea în coordonate carteziene și polare

Exemplul L3.1. Să se reprezinte grafic următoarele funcții:

a) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}, x \in [-3, 3], h = 0.001$

Mathcad:

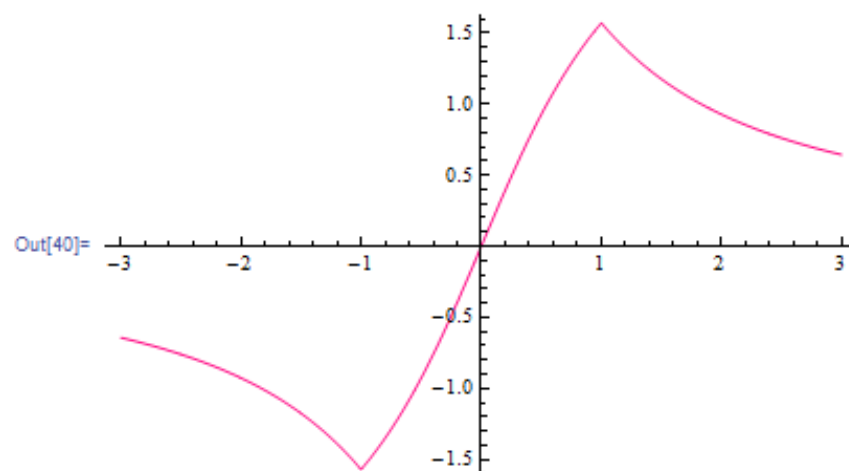
$$f(x) := \operatorname{asin}\left(\frac{2 \cdot x}{1 + x^2}\right) \quad x := -3, -2.999.. 3$$



Mathematica:

```
In[32]:= f[x_] := ArcSin[ $\frac{2 \star x}{1 + x^2}$ ];
```

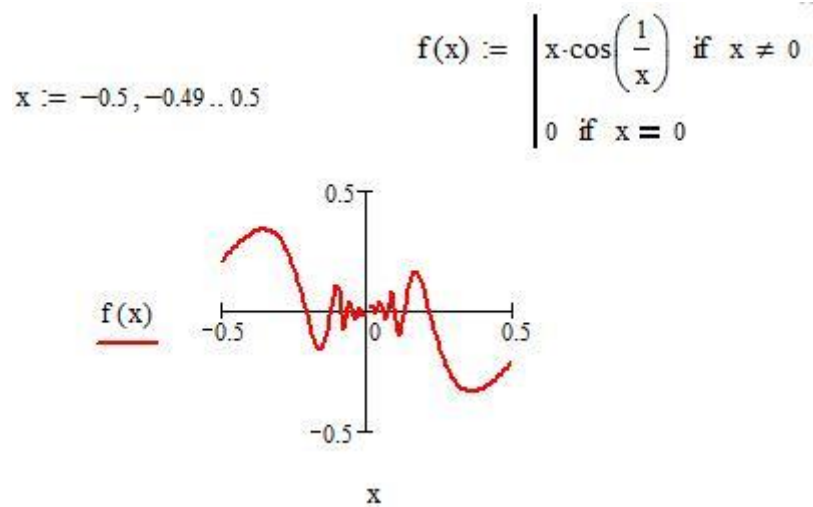
```
In[40]:= Plot[f[x], {x, -3, 3}, PlotPoints -> 6000]
```



b) $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, x \in [-0.5, 0.5], h = 0.01$



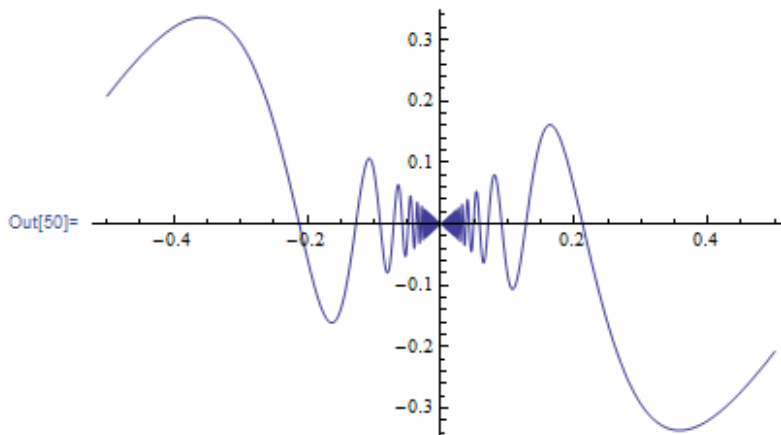
Mathcad:



Mathematica:

```
In[49]:= g[x_] := { x * Cos[1/x]  x != 0
                  0              x == 0
```

```
In[50]:= Plot[g[x], {x, -0.5, 0.5}, PlotPoints -> 100]
```



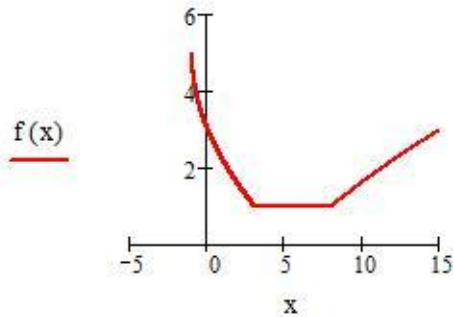
c) $f(x) = \begin{cases} -2\sqrt{x+1}+5, & -1 \leq x \leq 3 \\ 1, & 3 < x < 8 \\ 2\sqrt{x+1}-5, & 8 \leq x \leq 15 \end{cases}$



Mathcad:

$$f(x) := \begin{cases} -2\sqrt{x+1} + 5 & \text{if } -1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{if } 3 < x < 8 \\ 2\sqrt{x+1} - 5 & \text{if } 8 \leq x \leq 15 \end{cases}$$

$$x := -1, -0.999 \dots 15$$

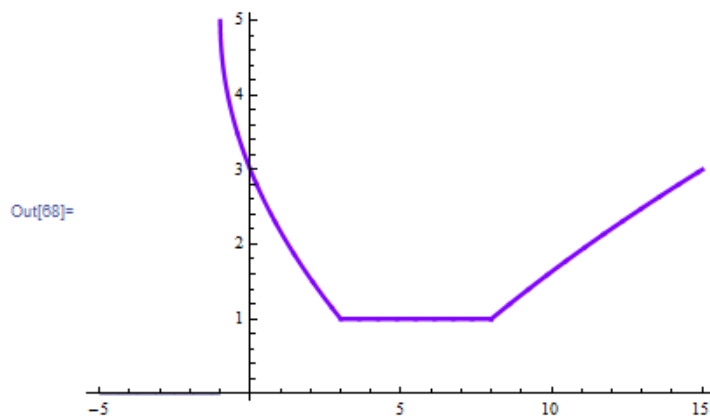


Mathematica:

```
In[51]:= Clear[f];
```

```
In[52]:= f[x_] := { (-2)*Sqrt[x+1] + 5 -1 <= x <= 3
                  1 3 < x < 8
                  2*Sqrt[x+1] - 5 8 <= x <= 15 }
```

```
In[68]:= Plot[f[x], {x, -5, 15}, PlotPoints -> 16000]
```



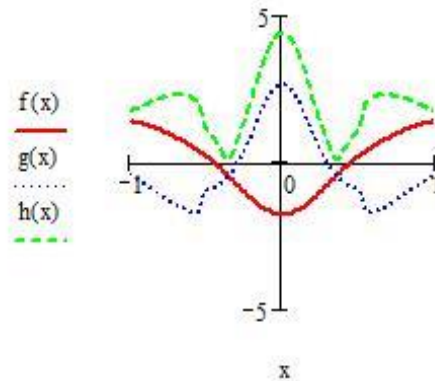
$$d) \begin{cases} f(x) = \frac{|x^2 - 2| - |x^2 - 3|}{x^2 + \frac{1}{4}} + \sqrt{5} \\ g(x) = f(x)^2 + \sqrt[3]{\cos 3x} - \sqrt{2}, \quad x \in [-1, 1], h = 0.02 \\ h(x) = |f(x) - g(x)| \end{cases}$$



Mathcad:

$$x := -1, -0.98 \dots 1$$

$$f(x) := \frac{|x^2 - 2| - |x^2 - 3|}{x^2 + \frac{1}{4}} + \sqrt{5} \quad g(x) := f(x)^2 + \sqrt[3]{\cos(3 \cdot x)} - \sqrt{2} \quad h(x) := |f(x) - g(x)|$$



Mathematica:

```
Clear[f, g]
```

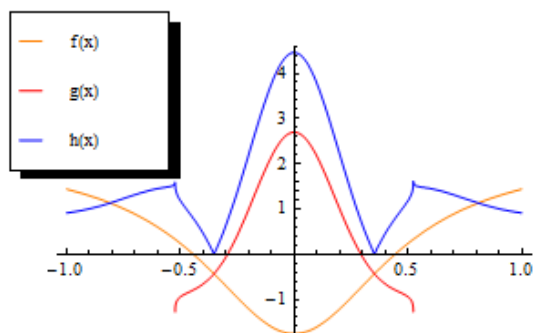
$$f[x_] := \frac{\text{Abs}[x^2 - 2] - \text{Abs}[x^2 - 3]}{x^2 + \frac{1}{4}} + \sqrt{5}$$

$$g[x_] := f[x]^2 + \sqrt[3]{\text{Cos}[3 \star x]} - \sqrt{2}$$

$$h[x_] := \text{Abs}[f[x] - g[x]];$$

```
Needs["PlotLegends`"]
```

```
Plot[{f[x], g[x], h[x]}, {x, -1, 1}, PlotPoints -> 100, PlotLegend -> {"f(x)", "g(x)", "h(x)"}, PlotStyle -> {Orange, Red, Blue}]
```





Exemplul L3.2. Reprezentați grafic următoarele curbe remarcabile din geometrie:

a) *Cercul* are ecuația carteziană implicită:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

și ecuațiile parametrice:

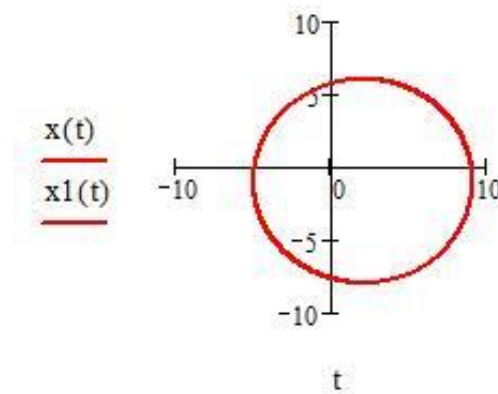
$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t \\ y = y_0 + r \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

Mathcad:

$$x_c := 2 \quad y_c := -1 \quad r := 7$$

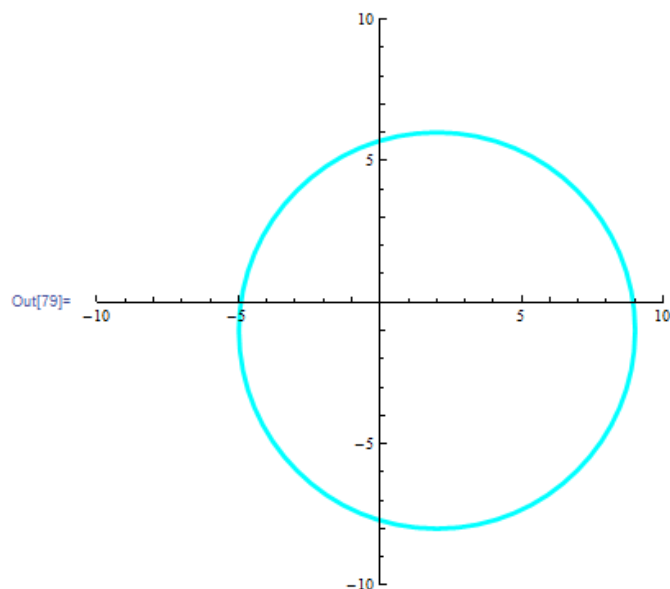
$$x(t) := \sqrt{r^2 - (t - x_c)^2} + y_c \quad x1(t) := -\sqrt{r^2 - (t - x_c)^2} + y_c$$

$$t := x_c - r, x_c - r + 0.001.. x_c + r$$



Mathematica:

```
In[79]:= Graphics[Circle[{2, -1}, 7], Axes -> True, PlotRange -> {{-10, 10}, {-10, 10}}]
```





b) *Elipsa* are ecuația carteziană implicită:

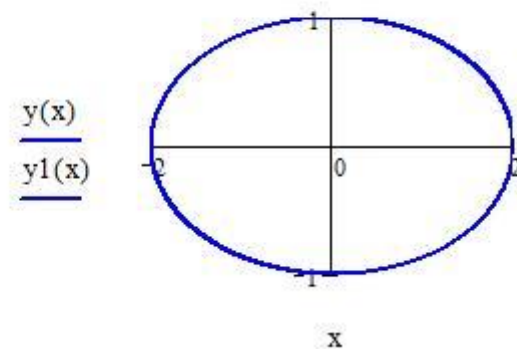
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0$$

și este caracterizată de ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

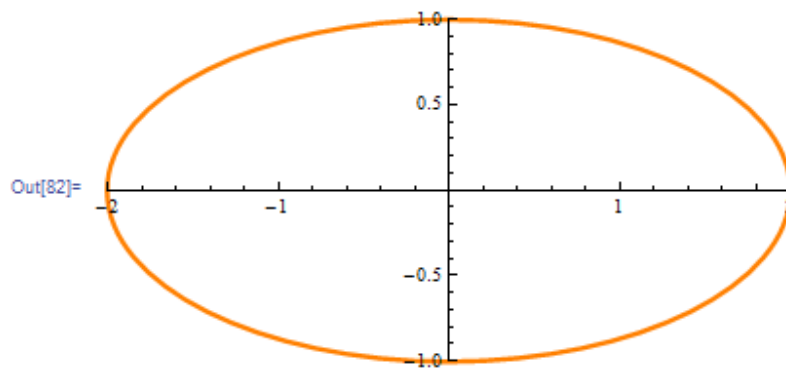
Mathcad:

$$a := 2 \quad b := 1 \quad x := -a, -a + 0.001 \dots a \quad y(x) := \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad y1(x) := -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$



Mathematica:

```
In[82]:= Graphics[Circle[{0, 0}, {2, 1}], Axes -> True, PlotRange -> {{-2, 2}, {-1, 1}}]
```



c) *Parabola* are ecuația carteziană implicită:

$$y^2 = \begin{cases} 2px, & x > 0 \\ -2px, & x \leq 0 \end{cases}$$

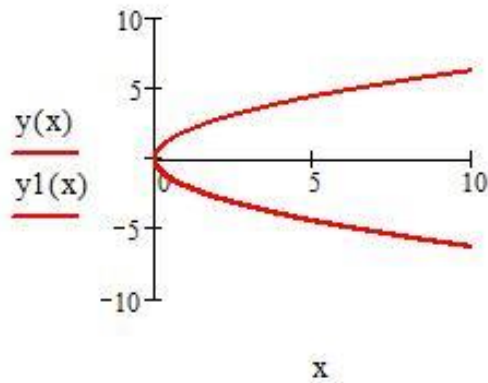
și ecuațiile parametrice:



$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p}, t \in \mathbb{R} \\ y = t \end{cases}$$

Mathcad:

$$p := 2 \quad x := 0, 0.001 \dots 10 \quad y(x) := \sqrt{2 \cdot p \cdot x} \quad y1(x) := -\sqrt{2 \cdot p \cdot x}$$

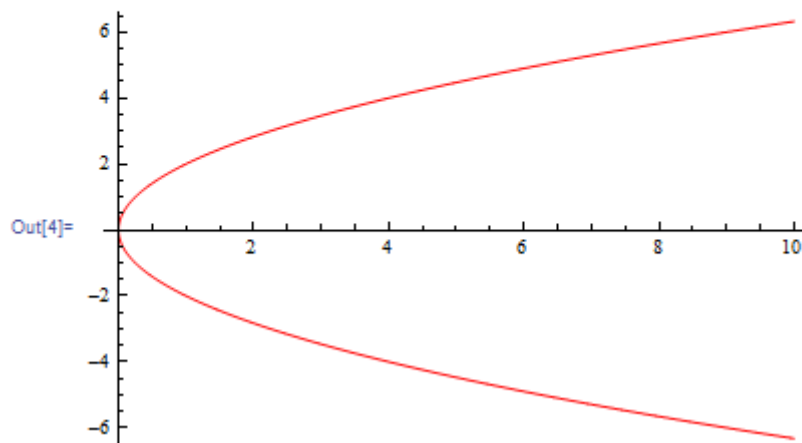


Mathematica:

In[1]:= p = 2;

In[2]:= y[x_] := Sqrt[2 * p * x]

In[4]:= Plot[{y[x], -y[x]}, {x, 0, 10}, PlotPoints -> 10 000, PlotStyle -> {Red, Red}]



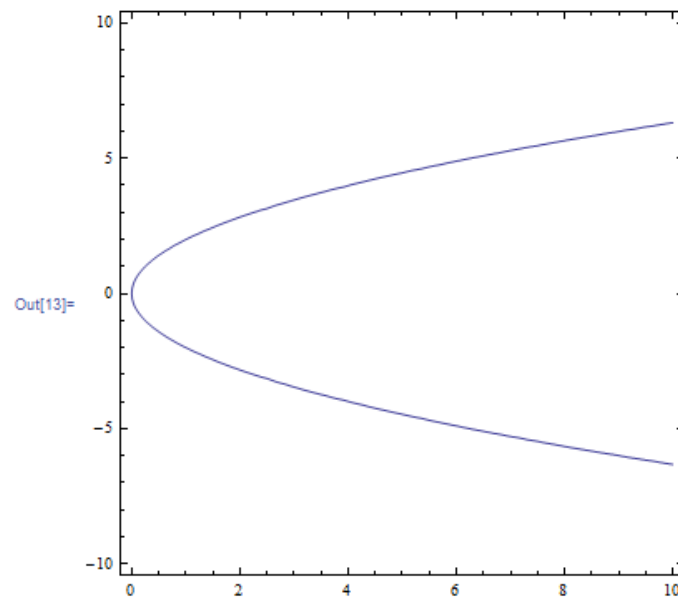
sau



Mathematica:

```
In[11]:= p = 2;
```

```
In[13]:= ContourPlot[y^2 == 2 * p * x, {x, 0, 10}, {y, -10, 10}]
```



d) *Hiperbola* are ecuația carteziană implicită:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

și este caracterizată de ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ dacă } x \in (a, \infty]$$

și

$$\begin{cases} x = -a \operatorname{ch} t \\ y = -b \operatorname{sh} t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ dacă } x \in (-\infty, -a].$$

Mathcad:

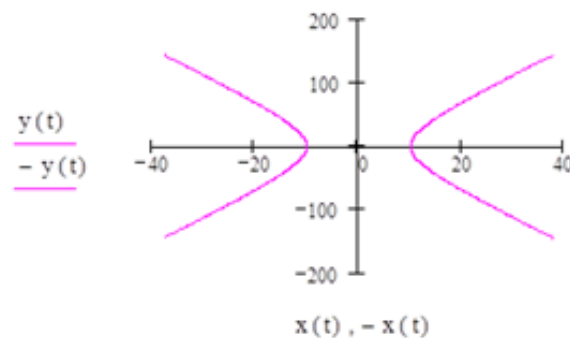
$a := 10$ $b := 40$

$x(t) := a \cdot \cosh(t)$

$y(t) := b \cdot \sinh(t)$

$a_0 := 2$

$t := -a_0, -a_0 + 0.01 \dots a_0$



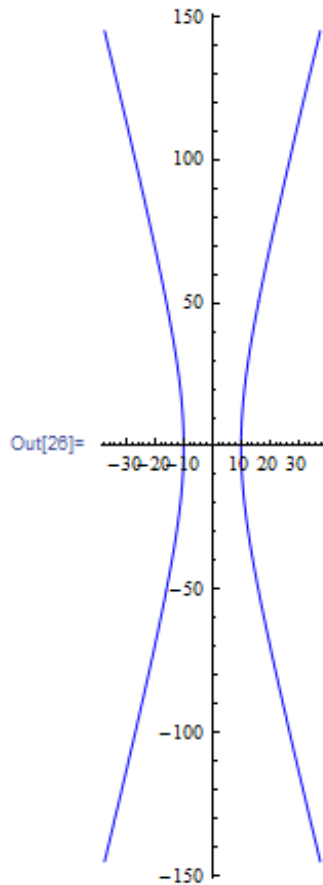


Mathematica:

```
In[24]:= a = 10; b = 40;
```

```
In[25]:= x[t_] := a * Cosh[t]; y[t_] := b * Sinh[t];
```

```
In[26]:= ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {-x[t], -y[t]}, {t, -2, 2}, PlotPoints -> 400]
```



e) *Astroida* are ecuația carteziană implicită:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

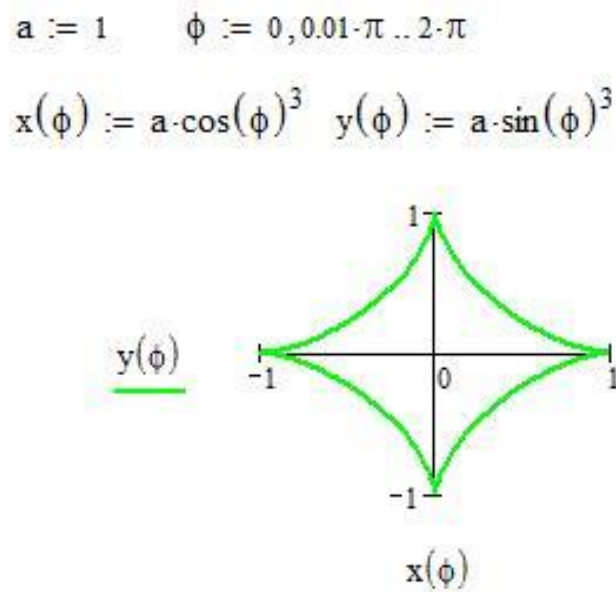
și ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Observația L3.3 Astroida este generată de un punct fix, aflat în interiorul unui cerc de rază r , când acesta se rostogolește fără alunecare pe partea interioară a unui cerc fix de rază $a = 4r$, unghiul de rostogolire fiind t .



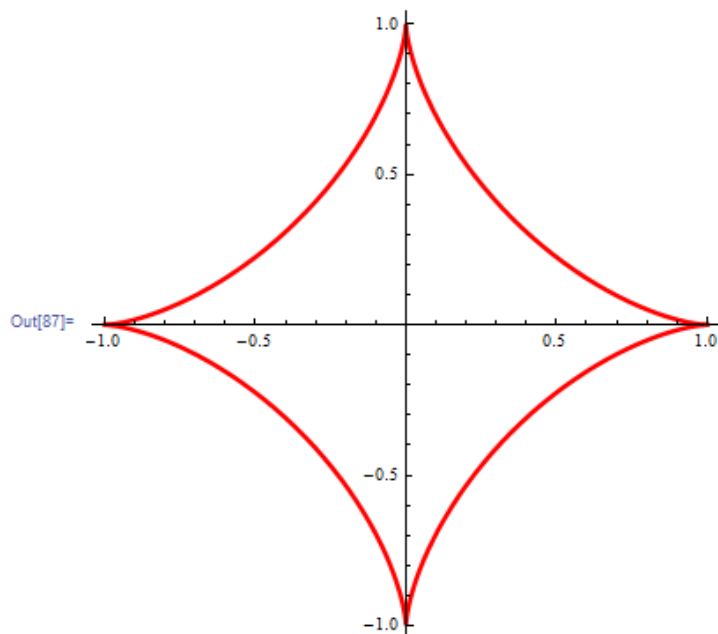
Mathcad:



Mathematica:

```
In[83]:= a = 1;
```

```
In[87]:= ParametricPlot[{a * Cos[φ]^3, a * Sin[φ]^3}, {φ, 0, 2 * π}, PlotPoints -> 200]
```

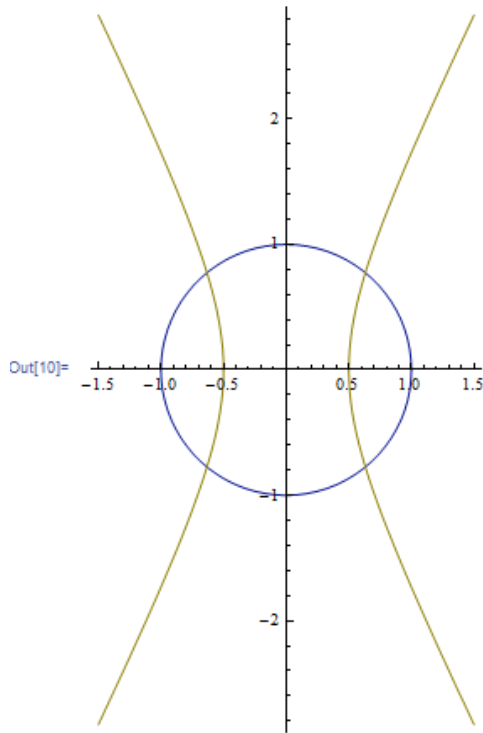


Exemplul L3.4. Reprezentați grafic cercul $x^2 + y^2 = 1$ și hiperbola $4x^2 - y^2 = 1$ pentru $-1.5 \leq x \leq 1.5$.



Mathematica:

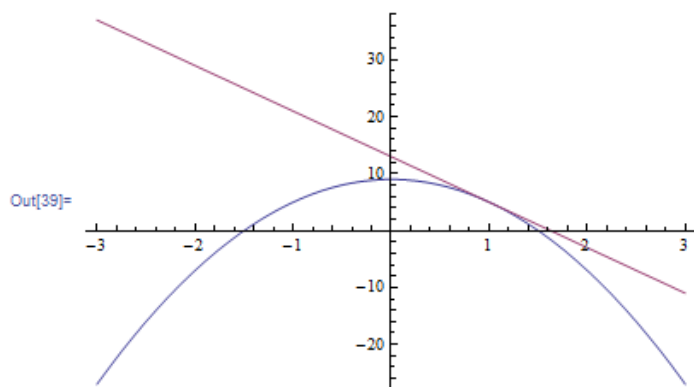
```
In[9]:= Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]
In[10]:= ImplicitPlot[{x^2 + y^2 == 1, 4 * x^2 - y^2 == 1}, {x, -1.5, 1.5}]
```



Exemplul L3.5. Reprezentați grafic tangenta la graficul funcției $f(x) = 9 - 4x^2$ în punctul $(1, f(1))$.

Mathematica:

```
In[34]:= f[x_] := 9 - 4 * x^2
In[39]:= Plot[{f[x], f'[1] * (x - 1) + f[1]}, {x, -3, 3}]
```

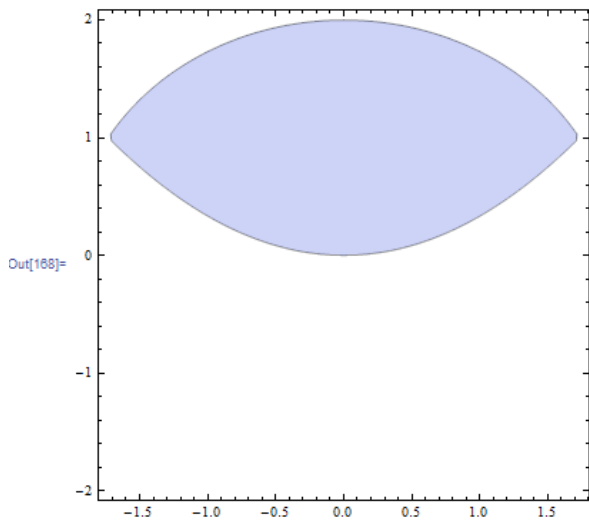




Exemplul L3.6. Reprezentați grafic regiunea definită de inegalitățile: $x^2 + y^2 \leq 4$, $3y \geq x^2$.

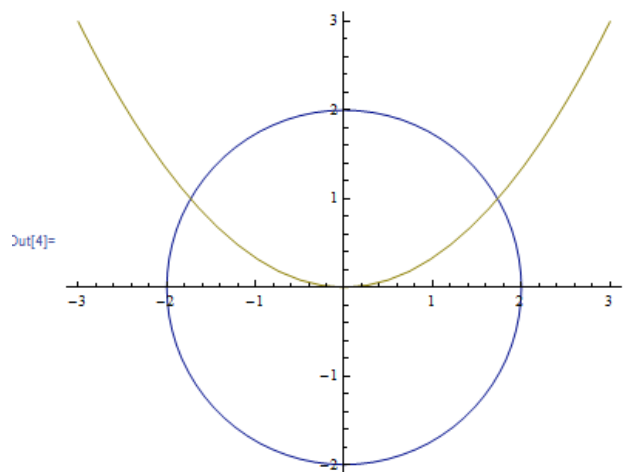
Mathematica:

```
In[188]:= RegionPlot[x^2 + y^2 <= 4 && 3 * y >= x^2, {x, -sqrt(3), sqrt(3)}, {y, -2, 2}]
```



```
In[1]:= Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]
```

```
In[4]:= ImplicitPlot[{x^2 + y^2 == 4, 3 * y == x^2}, {x, -3, 3}]
```

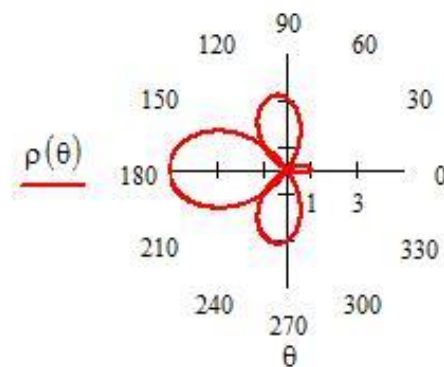


Exemplul L3.7. Reprezentați grafic în coordonate polare funcția:

Scarabaeus: $f(\theta) = b \cos 2\theta - a \cos \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$

Mathcad:

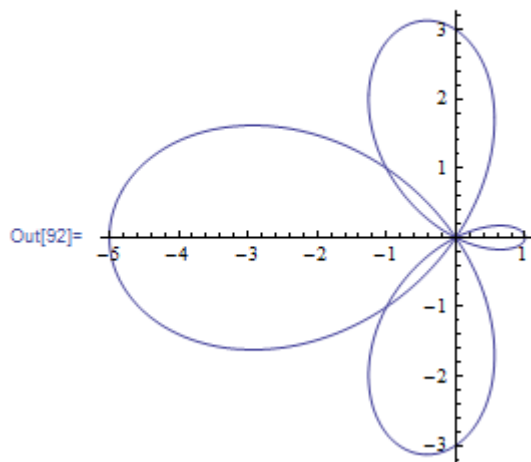
$$\theta := 0, 0.001 \dots 2\pi \quad a := 2 \quad b := 3 \quad \rho(\theta) := b \cdot \cos(2\theta) - a \cdot \cos(\theta)$$





Mathematica:

```
In[92]:= PolarPlot[3 * Cos[2 * t] - 2 * Cos[t], {t, 0, 2 * Pi}, PlotPoints -> 2000]
```



L3.3. Exerciții propuse

1. Să se reprezinte grafic următoarele funcții:

(a) $f(x) = \left(\frac{x+5}{\ln(x+5)} \right)^{\frac{1}{2}}, x \in [-3, 5]$

(b) $f(x) = \sin x + \cos 2x, x \in [0, 2\pi]$

(c) $f(x) = \arctg\left(\frac{x}{1+x^2}\right), x \in [-3, 3]$

(d) $f(x) = \arcsin x, g(x) = \arccos x, x \in [-1, 1]$

(e) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{daca } x \in [-10, 2] \\ 2x^2-1, & \text{daca } x \in (2, 20] \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, x \in [-1, 1]$

(g) $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}, g(x) = -x+1, h(x) = x-1, x \in [-2, 2]$

(h) $f(x) = e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{10}}{10!} \right), x \in \mathbb{R}.$

2. Reprezentați grafic următoarele curbe remarcabile din geometrie:

(a) *Cardioida* are ecuațiile parametrice:



$$\begin{cases} x = a \cos t(1 - \cos t) \\ y = a \sin t(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

Cardioida este generată de un punct fix față de un cerc de rază r , când acesta se rostogolește de-a lungul părții exterioare a unui cerc, care este tot de rază r , unghiul de rostogolire fiind t . În ecuațiile parametrice ale cardioidei s-a folosit notația $a = 2r$.

(b) *Lemniscata lui Bernoulli* are ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = \frac{a \cos \varphi}{1 + \sin^2 \varphi} \\ y = \frac{a \sin \varphi \cos \varphi}{1 + \sin^2 \varphi} \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi]$$

și ecuația carteziană implicită:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Lemniscata lui Bernoulli, care face parte din clasa curbelor lui Cassini se definește ca mulțimea punctelor P pentru care produsul distanțelor la două puncte fixe (simetrice față de origine și situate la distanța a față de aceasta) are o valoare constantă a^2 .

(c) *Curba Butterfly* :

$$\begin{cases} x = \left(e^{\cos t} - 2 \cos 4t + \sin^5 \frac{t}{12} \right) \cdot \sin t \\ y = \left(e^{\cos t} - 2 \cos 4t + \sin^5 \frac{t}{12} \right) \cdot \cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

(d) *Cicloida* are ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = r(\varphi - \sin \varphi) \\ y = r(1 - \cos \varphi) \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi]$$

și ecuația carteziană explicită:

$$x = \arccos \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Cicloida este generată de un punct fix P , aflat în interiorul unui cerc de rază r , la distanța a de centrul acestuia, când cercul se rostogolește fără să alunece de-a lungul unei drepte, unghiul de rostogolire fiind φ .

(e) *Foliul lui Descartes*:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}, t \in [-2, 2]$$



3. Reprezentați grafic curba:

$$\begin{cases} x = \int_0^t \sin\left(\frac{1}{2}u^2\right) du \\ y = \int_0^t \cos\left(\frac{1}{2}u^2\right) du \end{cases}, t \in [-10, 10]$$

4. Reprezentați grafic în același sistem de coordonate curbele

$$x^2 + 4xy + y^2 = 4 \text{ și } 5x^2 - 4xy + 2y^2 = 8 \text{ pentru } -4 \leq x \leq 4.$$

5. Reprezentați grafic în coordonate polare următoarele funcții:

(a) *Cardioida*: $f(\phi) = a(1 - \cos \phi)$, $\phi \in [0, 2\pi]$

(b) *Trifoiul cu patru foi*: $f(t) = a \sin 2t$, $t \in [0, 2\pi]$

(c) *Spirala lui Arhimede* $f(\phi) = 2\phi$, $\phi \in [0, 4\pi]$

(d) *Spirala hiperbolică*:

$$f(t) = \frac{-3}{t}, t \in \mathbb{R}_+.$$

L3.4. Bibliografie

1. M. L. Abell, J. P. Braselton, *Mathematica by Example*, Elsevier Academic Press, 2004.
2. G. Anastassiou, I. Iatan, *Intelligent Routines II: Solving Linear Algebra and Differential Geometry with Sage*, Springer, 2014.
3. G. Anastassiou, I. Iatan, *Intelligent Routines: Solving Mathematical Analysis with Matlab, Mathcad, Mathematica and Maple*, Springer, 2013.
4. O. Cira, *Lecții de Mathcad 2001 Professional*, ed. Grupul microInformatica, Cluj-Napoca, 2003.
5. J. Craig, B. Walls, *Mathematica Workshop (Introduction to Mathematica 6 and 7)*, 2011, http://facstaff.gpc.edu/~jcraig/calc1/mathematica6_7_handout.pdf
6. I. Iatan, *Îndrumător de laborator în Matlab 7.0*, ed. Conspress, București, 2009.
7. V. Postelnicu, S. Coatu, *Mică enciclopedie matematică*, ed. Tehnică, București, 1980.
8. I. Shingareva, C. Lizárraga- Celaya, *Maple and Mathematica. A problem solving approach for Mathematics*, Springer- Verlag, 2007.
9. Gh. Sirețchi, *Calcul diferențial și integral*, vol. 2, ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1985.



L4. Lecția de Laborator 4. Reprezentări grafice 3D în Mathcad și Mathematica

L4.1. Breviar teoretic

Mathcad	Mathematica
Definirea unei funcții de două variabile	
Se scrie $f(x,y):=$	Se scrie $f[x,y]:=$ sau se accesează butonul Define Function din paleta <i>Basic Math Assistant</i> , zona <i>Calculator</i> , fișa <i>Advanced</i>
Scrierea de funcții pe ramuri	
Sintaxa este $f(x,y):=$ urmată de acționarea butonului Add Line din paleta <i>Programming</i>	se accesează butoanele Define Function și apoi { } , ambele din paleta <i>Basic Math Assistant</i> , zona <i>Calculator</i> , fișa <i>Advanced</i>

Sistemul de coordonate carteziene în trei dimensiuni furnizează cele trei dimensiuni fizice ale spațiului - lungime, lățime și înălțime. În figura L4.1 este înfățișat modul de reprezentare a acestuia. Pentru reprezentarea unui reper cartezian în E_3 (spațiul tridimensional al geometriei elementare) se alege întâi un punct numit origine.

Fie un punct O în E_3 numit **origine** și trei versori necoplanari $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ cărora le atașăm **axe de coordonate** Ox , Oy , Oz , ce au același sens cu sensul acestor versori (vezi Fig. L4.1). Ansamblul $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se numește **reper cartezian** în E_3 .

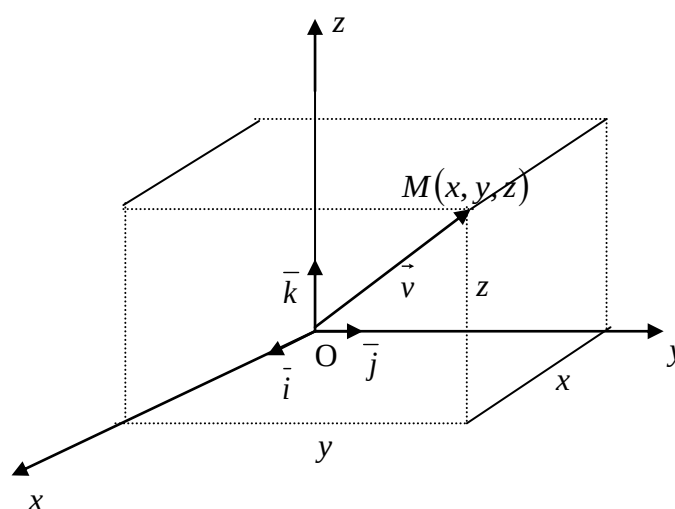


Fig. L4.1. Reprezentarea unui reper cartezian în E_3



Fiind dat un sistem de coordonate carteziane, oricărui punct în spațiu îi putem asocia un triplet de numere și invers, oricărui triplet de numere, un punct. Cele trei numere pe care le asociem punctului M se numesc **coordonatele carteziane** ale acestui punct.

Pentru a realiza reprezentarea grafică în coordonate carteziane în Mathcad a funcțiilor de două variabile există două metode.

A) Metoda I ce necesită parcurgerea următoarelor etape:

1. se definește funcția ce urmează să fie reprezentată ;
2. se alege dreptunghiul $[a,b] \times [c,d]$ pe care vrem să realizăm reprezentarea;
3. se împarte intervalul $[a,b]$ în n părți egale, obținându-se $n+1$ puncte echidistante $x_i, i = \overline{0,n}$; similar se împarte și intervalul $[c,d]$ în m părți egale, rezultând $m+1$ puncte echidistante $y_j, j = \overline{0,m}$;
4. valorile funcției în punctul de coordonate (x_i, y_j) se vor atribui elementului $M_{i,j}$ al matricei M ;
5. se reprezintă punctele de coordonate $(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ cărora în Mathcad le corespund punctele de coordonate $(i, j, M_{i,j})$;
6. se construiesc patrulatere, ce au ca vârfuri aceste puncte, pe care se sprijină panza ce reprezintă suprafața descrisă de funcție.

B) Metoda II ce necesită parcurgerea următoarelor etape:

1. se definește funcția ce urmează să fie reprezentată;
2. se aleg coordonatele varfurilor dreptunghiului $[a,b] \times [c,d]$ pe care vrem să realizăm reprezentarea;
3. se inserează funcția *CreateMesh*.

Forma de prezentare a acestui grafic poate fi modificată dacă se dă un dublu click pe grafic; drept consecință se va deschide fereastra *3D Plot Format*.

Reprezentarea grafică 3D în coordonate carteziane folosind Mathematica se poate realiza atât pe baza funcțiilor specializate în acest sens din zona *Basic Commands* a paletei *Basic Math Assistant*, precum:

1. **Plot3D[f[x,y], {x, a, b}, {y, c, d}]** reprezintă grafic funcția $f[x,y]$ pe intervalul $[a,b] \times [c,d]$;

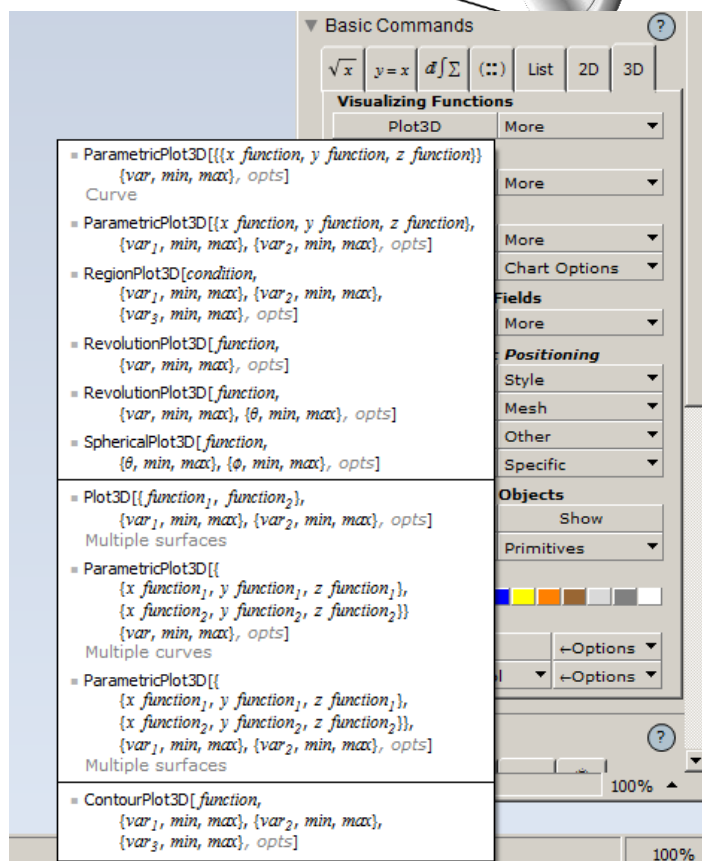
2. **Plot3D[{f[x,y],g[x,y]},{x,a,b}, {y, c, d}]** reprezintă grafic funcțiile f și g pe intervalul $[a,b] \times [c,d]$;

6. **ContourPlot3D[f[x,y,z]==0,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax},{z,zmin,zmax}]** reprezintă grafic funcția f , definită implicit;

cât și

ParametricPlot3D[{f[t], g[t], h[t]},{t, tmin, tmax}]

ce permite reprezentarea unei curbe 3D dată sub formă parametrică.



Mathematica oferă și posibilitatea reprezentării grafice a unei regiuni, definită de niște inegalități, cu ajutorul funcției:

RegionPlot3D[pred, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}, {z, zmin, zmax}],

care nu are nici un corespondent în Mathcad.

Mathematica oferă în plus față de Mathcad și facilitatea reprezentării unor suprafețe care rezultă prin rotirea graficului unei funcții $f(x)$ în jurul unei axe.

a) Rotirea în jurul axei Ox:

RevolutionPlot3D[f(x), {x, xmin, xmax}, RevolutionAxis->{1, 0, 0}]

sau

ParametricPlot3D[{x, f[x]*Cos[t], f[x]*Sin[t]},{x, xmin, xmax},{t,0,2Pi}]

b) Rotirea în jurul axei Oy:

RevolutionPlot3D[f(x), {x, xmin, xmax}, RevolutionAxis->{0, 1, 0}]

sau

ParametricPlot3D[{x*Cos[t],x*Sin[t],f[x]},{x, xmin, xmax},{t,0,2Pi}].

Prin intermediul funcției (neîntâlnită în Mathcad)

Show[plot1, plot2]

în Mathematica se pot reprezenta două obiecte grafice plot1 și plot2 în același sistem de coordonate; același efect se poate obține acționând butonul **Show** din zona *Basic Commands*.



Reprezentarea cuadricelor în spațiu se poate realiza:

- folosind ecuațiile sale parametrice: având ecuațiile parametrice ale quadricii se vor genera matricele X, Y, Z, care constituie ansamblul (X, Y, Z), ce se va introduce în locul rezervat matricei, de la metoda A).
- pe baza ecuației în coordonate carteziene, ce presupune reprezentarea quadricii folosind una din cele două metode de reprezentare a unei funcții de două variabile.

L4.2. Reprezentarea în coordonate carteziene

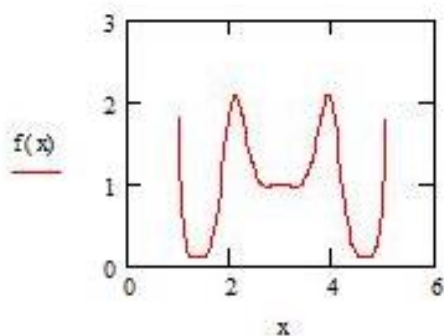
Exemplul L4.1. Reprezentați grafic suprafața obținută prin rotirea curbei, care are ecuația

$$f(x) = e^{-(x-3)^2} \cos 4(x-3), x \in [1, 5]$$

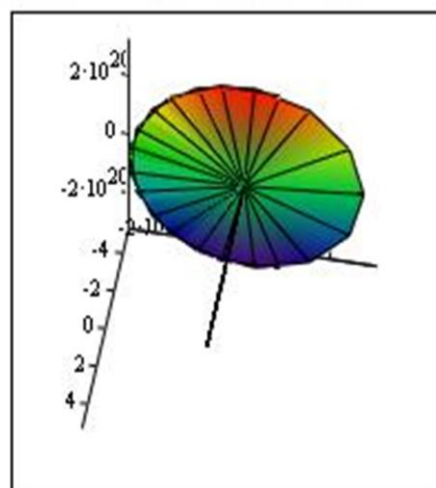
în jurul axei Ox.

Mathcad:

$$f(x) := e^{-(x-3)^2} \cdot \cos[4 \cdot (x-3)] \quad x := 1, 1.01..5$$



$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq 2\pi \quad 1 \leq r \leq 5 \\ X(r, t) := r \quad Y(r, t) := f(r) \cdot \cos(t) \quad Z(r, t) := f(r) \cdot \sin(t) \end{aligned}$$



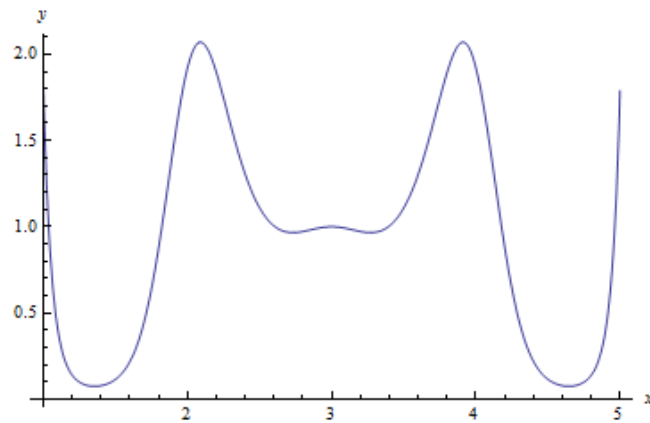
(X, Y, Z)



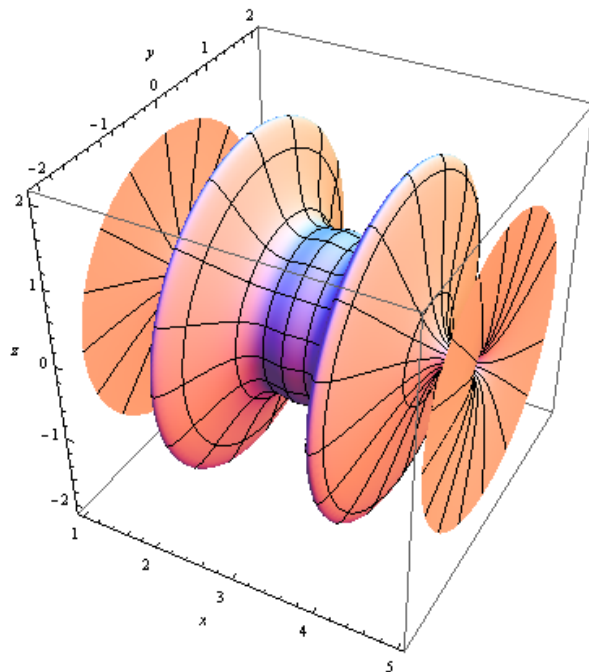
Mathematica:

```
f[x_] := e-(x-3)2 * Cos[4*(x-3)]
```

```
Plot[f[x], {x, 1, 5}, PlotPoints -> 1000, AxesLabel -> {x, y}]
```



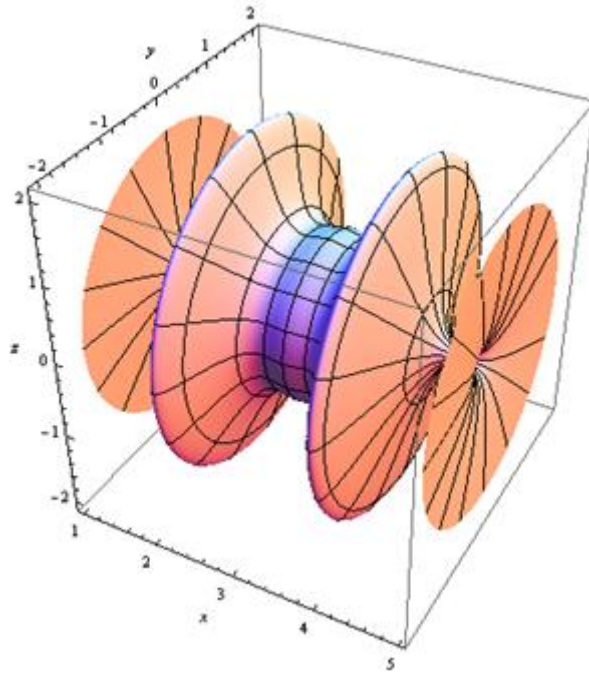
```
ParametricPlot3D[{r, f[r] * Cos[t], f[r] * Sin[t]}, {r, 1, 5}, {t, 0, 2 * Pi}, PlotPoints -> {100, 100}, AxesLabel -> {x, y, z}]
```



sau

Mathematica:

```
In[32]:= RevolutionPlot3D[f[x], {x, 1, 5}, RevolutionAxis -> {1, 0, 0}]
```

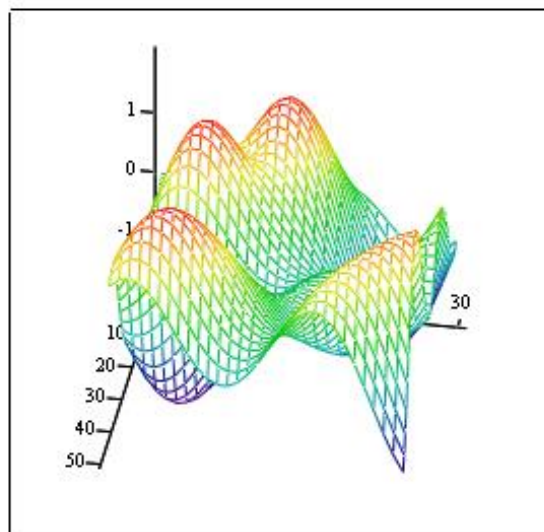


Exemplul L4.2. Reprezentați grafic în 3D suprafața:

a) $f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2} + \cos(x + y)$, $x \in [-3, 9]$, $y \in [-3, 6]$

Mathcad:

$$\begin{aligned} n &:= 50 & a &:= -3 & b &:= 9 & h &:= \frac{b-a}{n} & k &:= 0..n & x_k &:= a + k \cdot h \\ m &:= 30 & c &:= -3 & d &:= 6 & q &:= \frac{d-c}{m} & j &:= 0..m & y_j &:= c + j \cdot q \\ f(x, y) &:= \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) + \cos(x + y) & M_{k,j} &:= f(x_k, y_j) \end{aligned}$$



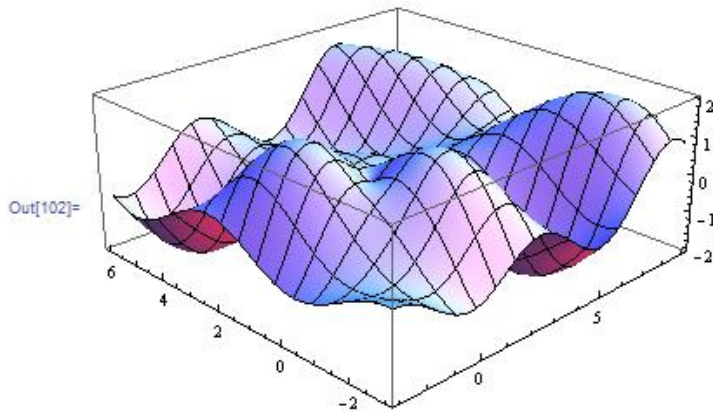
M



Mathematica:

```
In[99]:= f[x_, y_] := Sin[Sqrt[x^2 + y^2]] + Cos[x + y]
```

```
In[102]:= Plot3D[f[x, y], {x, -3, 9}, {y, -3, 6}, PlotPoints -> {50, 30}]
```



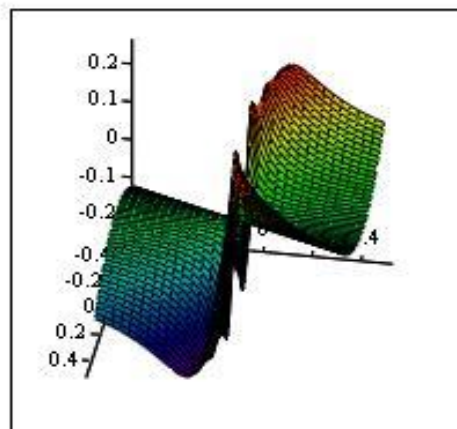
b) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + 4y^2}, x, y \in [-1/2, 1/2]$

Mathcad:

$$f(x, y) := \frac{x^2 \cdot y}{x^4 + 4 \cdot y^2}$$

$$x0 := -\frac{1}{2} \quad x1 := \frac{1}{2} \quad y0 := -\frac{1}{2} \quad y1 := \frac{1}{2}$$

$$c := \text{CreateMesh}(f, x0, x1, y0, y1, 50, 30)$$



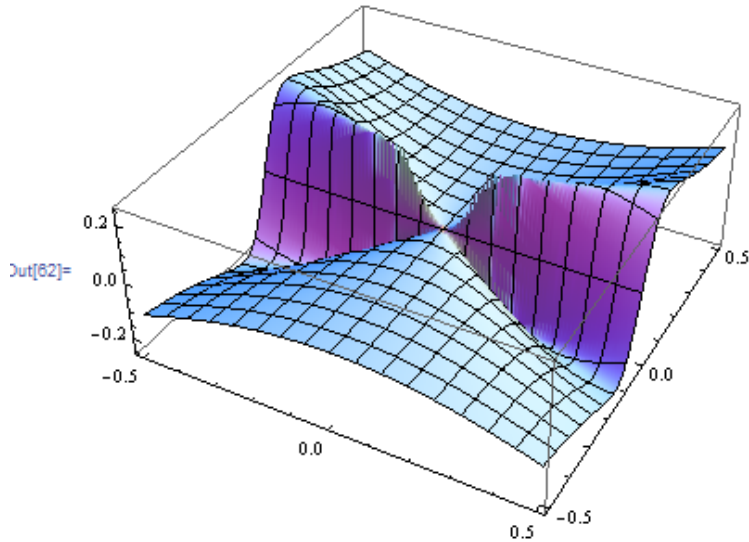
c



Mathematica:

```
In[58]:= f[x_, y_] :=  $\frac{x^2 \star y}{x^4 + 4 \star y^2}$ 
```

```
In[62]:= Plot3D[f[x, y], {x, -1/2, 1/2}, {y, -1/2, 1/2}, PlotPoints -> {50, 30}]
```



Exemplul L4.3. Reprezentați grafic regiunea situată între suprafețele $z = 4 - x^2 - y^2$ și $z = 2 - x$, pentru $x \in [-2, 2]$, $y \in [-2, 2]$.

Mathcad:

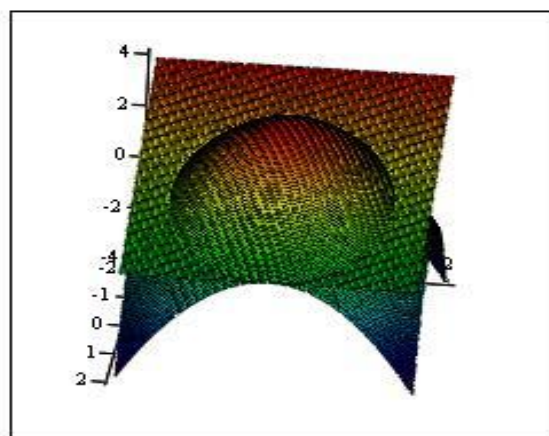
$$f(x, y) := 4 - x^2 - y^2$$

$$g(x, y) := 2 - x$$

$$x0 := -2 \quad x1 := 2 \quad y0 := -2 \quad y1 := 2$$

$$c := \text{CreateMesh}(f, x0, x1, y0, y1, 100, 100)$$

$$c1 := \text{CreateMesh}(g, x0, x1, y0, y1, 100, 100)$$



c, c1

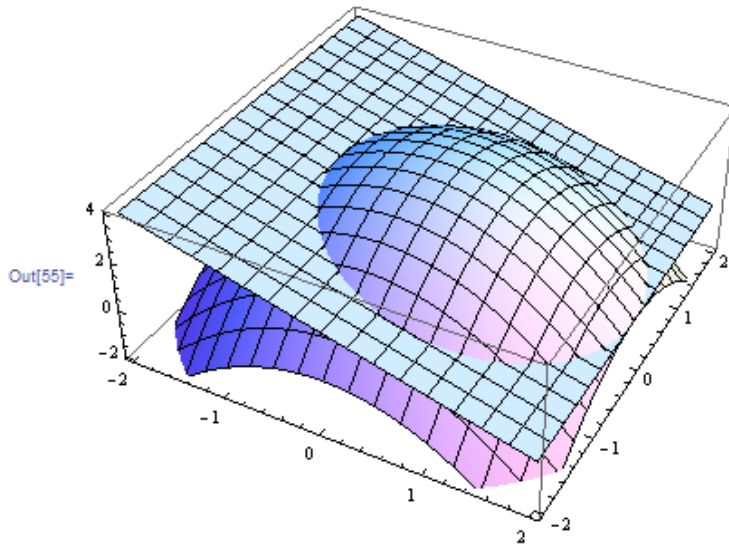


Mathematica:

```
In[52]:= p1 = Plot3D[4 - x^2 - y^2, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints -> 100];
```

```
In[53]:= p2 = Plot3D[2 - x, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints -> 100];
```

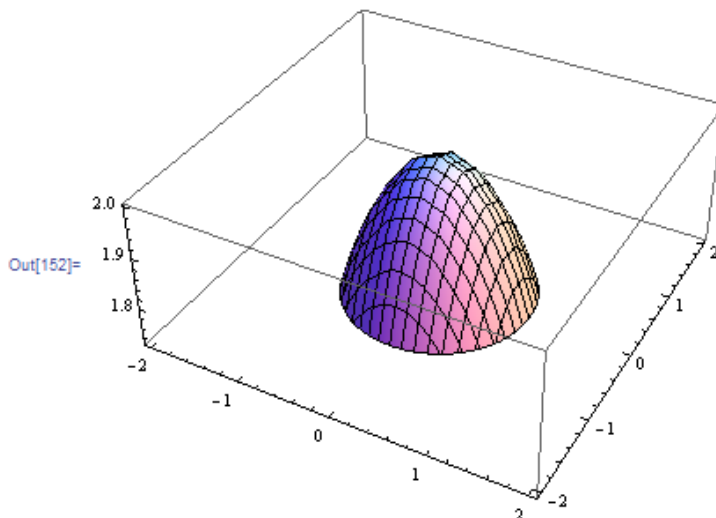
```
In[55]:= Show[p1, p2, PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}, {-2, 4}}]
```



Exemplul L4.4. Reprezentați grafic porțiunea din suprafața $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, situată în regiunea $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Mathematica:

```
In[152]:= Plot3D[Sqrt[4 - x^2 - y^2], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, RegionFunction -> Function[{x, y, z}, x^2 + y^2 <= 1]]
```



Exemplul L4.5. Reprezentați grafic următoarele quadrice:

a) *Sfera*: are ecuația în coordonate carteziene:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

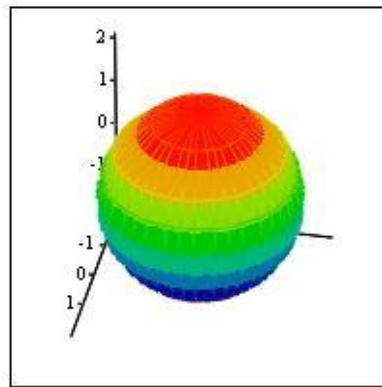


și reprezentarea parametrică:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad \rho > 0, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

Mathcad:

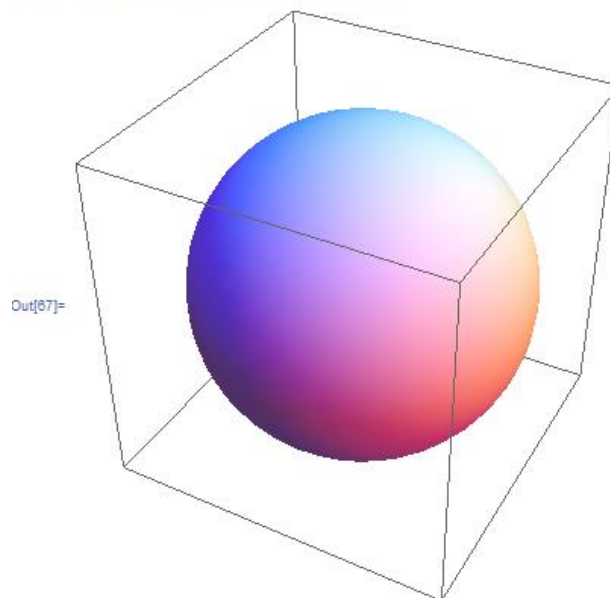
$$\begin{aligned} r &:= 2 \\ X(\phi, \theta) &:= r \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\theta) & 0 \leq \phi \leq \pi \\ Y(\phi, \theta) &:= r \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) & 0 \leq \theta \leq 2 \cdot \pi \\ Z(\phi, \theta) &:= r \cdot \cos(\phi) \end{aligned}$$



(X,Y,Z)

Mathematica:

In[67]:= Graphics3D[Sphere[{0, 0, 0}, 2]]



b) Conul de ordin doi: are ecuația în coordonate carteziane

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a \geq b > 0, \quad c > 0$$

și reprezentarea parametrică:



$$\begin{cases} x = av \cos u \\ y = bv \sin u, \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in \mathbb{R} \\ z = \pm cv \end{cases}$$

Mathcad:

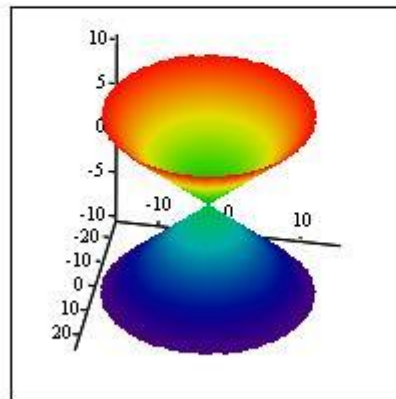
$$a := 5 \quad b := 3 \quad c := 2 \quad 0 \leq u \leq 2 \cdot \pi \quad 0 \leq v \leq 50$$

$$X(u, v) := a \cdot v \cdot \cos(u)$$

$$Y(u, v) := b \cdot v \cdot \sin(u)$$

$$Z(u, v) := c \cdot v$$

$$Zl(u, v) := -c \cdot v$$

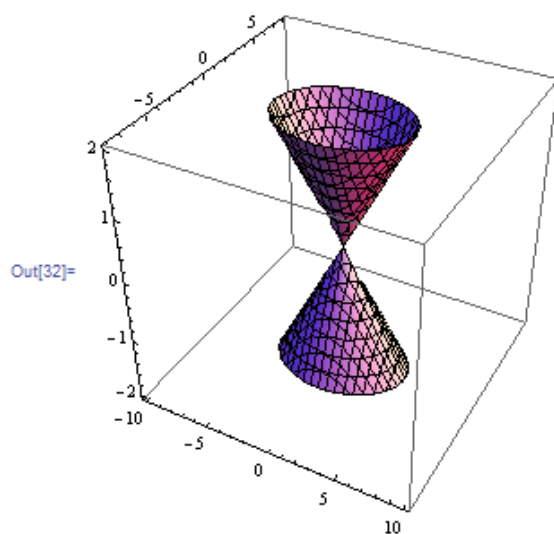


(X, Y, Z), (X, Y, Zl)

Mathematica:

In[31]:= Needs["Graphics`ContourPlot3D`"]

In[32]:= ContourPlot3D[$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} == 0$, {x, -10, 10}, {y, -8, 8}, {z, -2, 2}]



Observația L4.6. Dacă $a=b$ atunci se obține conul de rotație, care poate fi generat prin rotația unei cuadrice (care reprezintă două drepte concurente)



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

în jurul axei Oz.

c) *Hiperboloidul cu o pânză*: are ecuația în coordonate carteziene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a \geq b > 0, \quad c > 0$$

și reprezentarea parametrică:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{1+u^2} \cos v \\ y = b\sqrt{1+u^2} \sin v, \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in [0, 2\pi]. \\ z = cu \end{cases}$$

Observația L4.7. Dacă $a=b$ atunci hiperboloidul cu o pânză este de rotație în jurul lui Oz, adică poate fi generat prin rotația hiperbolei

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

în jurul axei Oz.

Numărul pânzelor este dat de numărul pătratelor care au același semn cu termenul liber.

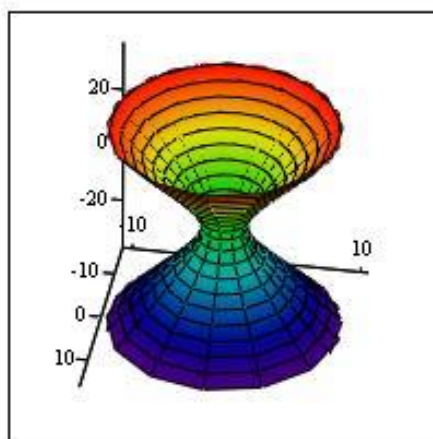
Mathcad:

$$a := 3 \quad b := 2 \quad c := 7 \quad 0 \leq v \leq 2 \cdot \pi \quad -2 \leq u \leq 2$$

$$X(u, v) := a \cdot \sqrt{1 + u^2} \cdot \cos(v)$$

$$Y(u, v) := b \cdot \sqrt{1 + u^2} \cdot \sin(v)$$

$$Z(u, v) := c \cdot u$$

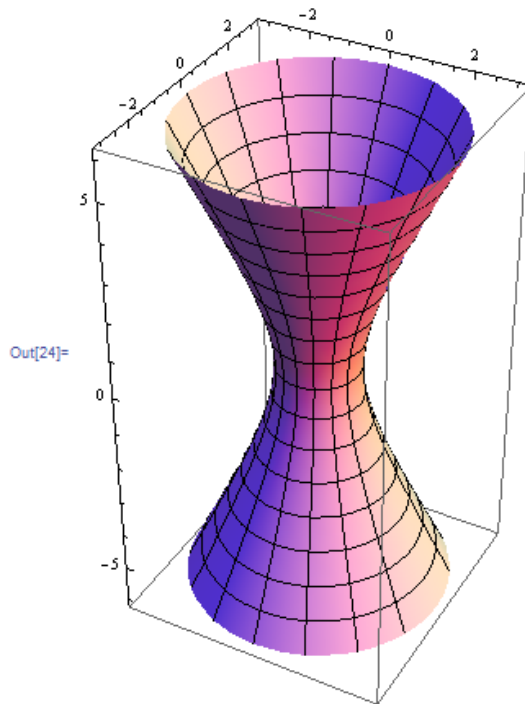


(X,Y,Z)



Mathematica:

```
In[24]:= ParametricPlot3D[{Sqrt[1+u^2]*Cos[v], Sqrt[1+u^2]*Sin[v], 2*u}, {u, -3, 3}, {v, 0, 2*Pi}]
```

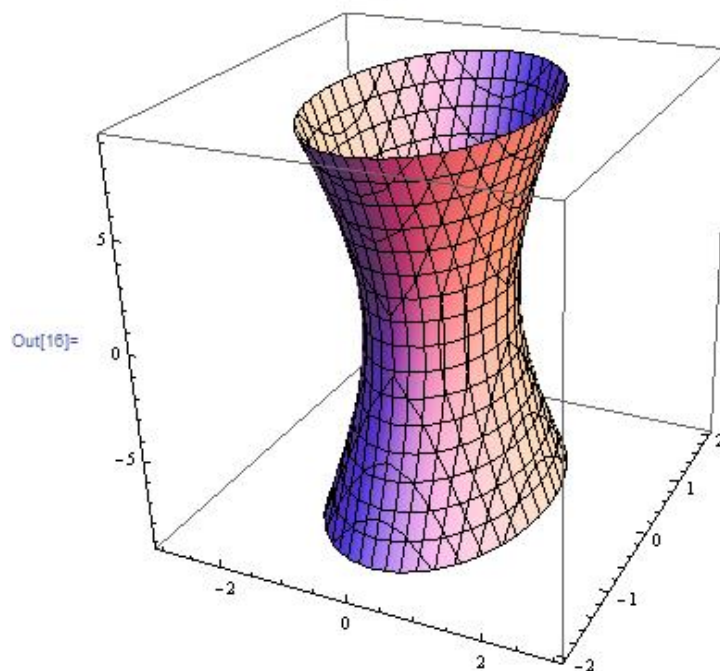


sau

Mathematica:

```
In[15]:= Needs["Graphics`ContourPlot3D`"]
```

```
In[16]:= ContourPlot3D[x^2 + y^2 - z^2/49 == 1, {x, -3, 3}, {y, -2, 2}, {z, -9, 9}]
```





d) *Hiperboloidul cu două pânze*: ecuația în coordonate carteziene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a \geq b > 0, \quad c > 0$$

și reprezentarea parametrică:

$$\begin{cases} x = a \sinh u \cos v \\ y = b \sinh u \sin v, \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in [0, 2\pi]. \\ z = \pm c \cosh u \end{cases}$$

Observația L4.8. Dacă $a=b$ atunci hiperboloidul cu două pânze este de rotație în jurul lui Oz, adică poate fi generat prin rotația hiperbolei

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

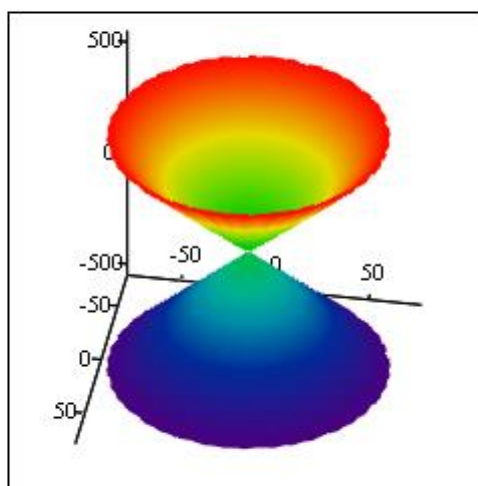
în jurul axei Oz.

Mathcad:

$$a := 1 \quad b := 1 \quad c := 7 \quad -3 \leq u \leq 3 \quad 0 \leq v \leq 2 \cdot \pi$$

$$X(u, v) := a \cdot \sinh(u) \cdot \cos(v) \quad Y(u, v) := b \cdot \sinh(u) \cdot \sin(v)$$

$$Z(u, v) := c \cdot \cosh(u) \quad Z1(u, v) := -c \cdot \cosh(u)$$

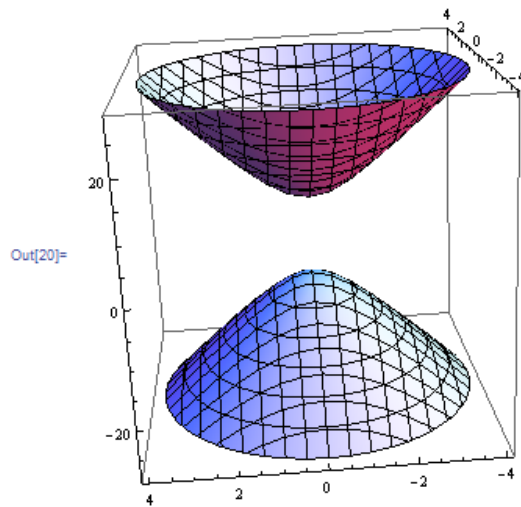


$(X, Y, Z), (X, Y, Z1)$



Mathematica: Needs["Graphics`ContourPlot3D`"]

In[20]:= ContourPlot3D[$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{49} == -1$, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}, {z, -28, 28}]



e) *Paraboloidul hiperbolic*: are ecuația în coordonate carteziene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a > 0, b > 0$$

și reprezentarea parametrică:

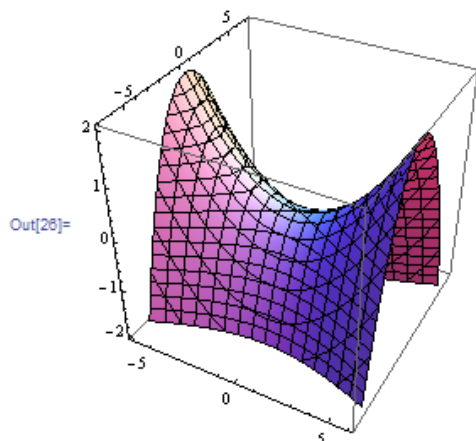
$$\begin{cases} x = a\sqrt{2v} \cos u \\ y = b\sqrt{2v} \sin u, \quad u \in [0, 2\pi], v > 0. \\ z = v \cos 2u \end{cases}$$

Mathematica:

In[11]:= Needs["Graphics`ContourPlot3D`"]

In[25]:= a := 3; b := 2;

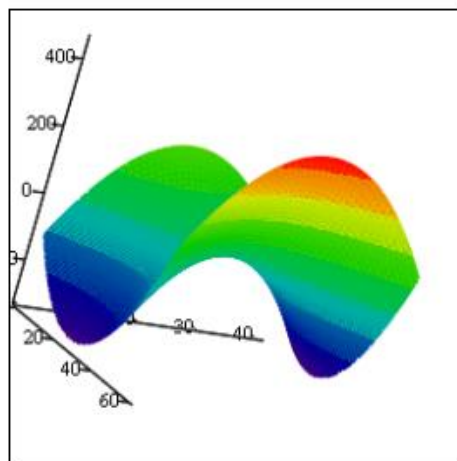
In[28]:= ContourPlot3D[$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} == 2 * z$, {x, -6, 6}, {y, -7, 7}, {z, -2, 2}]





Mathcad:

$$\begin{aligned}
 n &:= 60 & a &:= -60 & b &:= 90 & h &:= \frac{b-a}{n} & k &:= 0..n & x_k &:= a + k \cdot h \\
 aa &:= 3 & m &:= 40 & c &:= -50 & d &:= 50 & q &:= \frac{d-c}{m} & j &:= 0..m & y_j &:= c + j \cdot q \\
 bb &:= 2 & f(x,y) &:= \frac{x^2}{aa^2 \cdot 2} - \frac{y^2}{bb^2 \cdot 2} \\
 M_{k,j} &:= f(x_k, y_j)
 \end{aligned}$$



M

Observația L4.9. Nu există paraboloid hiperbolic *de rotație*; paraboloidul hiperbolic este singură suprafața de gradul doi care nu este o suprafață de rotație (deoarece nici o secțiune printr-un paraboloid hiperbolic nu este o elipsă). Paraboloidul hiperbolic este o suprafață de translație, aceasta obținându-se prin translația unei parabole (care are deschiderea în jos)

$$y^2 = -2b^2z$$

pe o parabolă (care are deschiderea în sus)

$$x^2 = 2a^2z.$$

f) *Paraboloidul eliptic*: are ecuația în coordonate carteziane

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a > 0, \quad b > 0$$

și reprezentarea parametrică:

$$\begin{cases}
 x = a\sqrt{2v} \cos u \\
 y = b\sqrt{2v} \sin u, \quad u \in [0, 2\pi], \quad v > 0. \\
 z = v
 \end{cases}$$



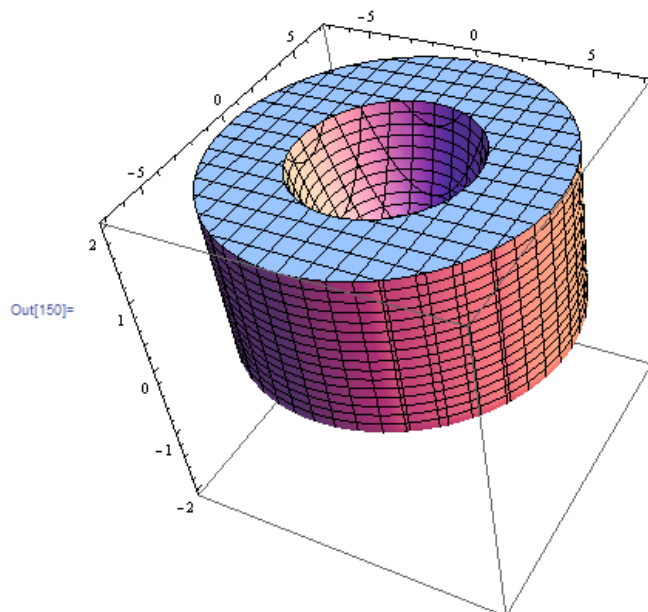
Exemplul L4.10. Reprezentați grafic regiunea marginită de:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq az \\ x^2 + y^2 \leq a^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Mathematica:

In[149]:= a = 7;

In[150]:= RegionPlot3D[x^2 + y^2 >= a * z && x^2 + y^2 <= a^2 && z >= 0, {x, -7, 7}, {y, -7, 7}, {z, -2, 2}, PlotPoints -> 35]



L4.3. Exerciții propuse

1. Reprezentați grafic suprafața obținută prin rotirea curbei, care are ecuația:

(a) $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}, x \in [-2, 2]$ în jurul axei Ox

(b) $g(x) = x^2 \sin x, x \in [0, \pi]$ în jurul axei Ox și respectiv în jurul axei Oy .

2. Reprezentați grafic:

(a) *elipsoidul*:

- are ecuația în coordonate carteziene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a \geq b \geq c > 0$$

- reprezentarea parametrică:



$$\begin{cases} x = a \sin u \cos v \\ y = b \sin u \sin v, u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi]; \\ z = c \cos u \end{cases}$$

(b) *cilindrul*:

- are ecuația în coordonate carteziene

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

- are reprezentarea parametrică:

$$\begin{cases} x = R \cos u \\ y = R \sin u, u \in [0, 2\pi], v \in [0, h]; \\ z = v \end{cases}$$

(c) *conul de rotație*:

- are ecuația în coordonate carteziene

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

- are reprezentarea parametrică:

$$\begin{cases} x = av \cos u \\ y = bv \sin u, v \in \mathbb{R}. \\ z = cv \end{cases}$$

3. Reprezentați grafic în 3D următoarele suprafețe:

(a) $f(x, y) = x^2 + x^2 y^2 + y^4, x, y \in [-1, 1]$

(b) $f(x, y) = 6x^2 y - 3x^4 - 2y^3, x \in [-2, 2], y \in [-2, 3]$

(c) $f(x, y) = (y-1)^2 e^{-(x+1)^2 - y^2} - \frac{10}{3} \left(-x^5 + \frac{1}{5} y - y^3 \right) e^{-x^2 - y^2} - \frac{1}{9} e^{-x^2 - (y+1)^2}, x, y \in [-3, 3]$

(d) $f(x, y) = x \sin y + y \sin x, x, y \in [0, 2\pi]$

(e) $f(x, y) = \frac{20}{(x^2 + y^2)^3}, x \in [1, 3], y \in [-6, 6]$

(f) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)^3}}, x \in [-10, 10], y \in [-6, 6]$

(g) $f(x, y) = y \sin^3 x, x, y \in [0, \pi]$



4. Reprezentați grafic arcul de elice:

$$\begin{cases} x = R \cos u \\ y = R \sin u, \quad u \in [0, 2\pi]. \\ z = \frac{a}{2\pi} u \end{cases}$$

5. Reprezentați grafic următoarele suprafețe algebrice remarcabile:

(a) *domul bohemian*:

$$\begin{cases} x = a \cos u \\ y = b \cos v + a \sin u, \quad u, v \in [0, 2\pi], \\ z = c \sin v \end{cases}$$

(b) *elipsoidul astroidal*:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 u \cos^3 v \\ y = b \sin^3 u \cos^3 v, \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad v \in [-\pi, \pi]. \\ z = c \sin^3 v \end{cases}$$

10. Reprezentați grafic porțiunea din suprafața

$$f(x, y) = \sqrt{2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2}},$$

situată în regiunea

$$R = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \leq 1 \right\}.$$

11. Reprezentați grafic regiunea marginită de:

$$(a) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ y^2 + z^2 \leq x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 6z \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \frac{y^2 + 2z^2}{4} \leq x \\ x \leq 2. \end{cases}$$



L4.4. Bibliografie

1. M. L. Abell, J. P. Braselton, *Mathematica by Example*, Elsevier Academic Press, 2004.
2. G. Anastassiou, I. Iatan, *Intelligent Routines II: Solving Linear Algebra and Differential Geometry with Sage*, Springer, 2014.
3. G. Anastassiou, I. Iatan, *Intelligent Routines: Solving Mathematical Analysis with Matlab, Mathcad, Mathematica and Maple*, Springer, 2013.
4. M. Ariciuc, M. Gavrilă, C. Costinescu, P. Matei, *Culegere de probleme de Analiză matematică*, Matrix Rom, București, 2002.
5. O. Cira, *Lecții de Mathcad 2001 Professional*, ed. Grupul microInformatica, Cluj-Napoca, 2003.
6. J. Craig, B. Walls, *Mathematica Workshop (Introduction to Mathematica 6 and 7)*, 2011, http://facstaff.gpc.edu/~jcraig/calc1/mathematica6_7_handout.pdf
7. I. Iatan, *Îndrumător de laborator în Matlab 7.0*, ed. Conspress, București, 2009.
8. G. Mărgulescu, P. Papadapol, *Curs de geometrie analitică, diferențială și algebră liniară*, Catedra de Matematici, 1976.
9. V. Postelnicu, S. Coatu, *Mică enciclopedie matematică*, ed. Tehnică, București, 1980.



L5. Lecția de Laborator 5. Elemente de analiză vectorială în Mathcad și Mathematica

L5.1. Breviar teoretic

În analiza vectorială, vectorii se consideră funcții de una sau mai multe variabile și se folosesc noțiunile și metodele calculului diferențial și integral.

Un **câmp scalar** este o funcție scalară, definită pentru orice punct din spațiu, care atribuie fiecărui punct $P(x, y, z)$, respectiv fiecărui vector de poziție $\vec{r}$, scalarul $\varphi = \varphi(x, y, z) = \varphi(\vec{r})$.

Câmpurile scalare se pot reprezenta prin suprafețe de nivel $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ sau prin linii de nivel $\varphi(x, y) = \text{const}$.

Exemple de câmpuri scalare: temperatura și densitatea unui corp.

Un **câmp vectorial** este o funcție vectorială, care atribuie fiecărui punct din spațiu $P(x, y, z)$, respectiv fiecărui vector de poziție $\vec{r}$, vectorul $\nu = \nu(x, y, z) = \nu(\vec{r})$.

Câmpurile vectoriale se pot reprezenta grafic prin săgeți duse în diferite puncte $\vec{r}$ ale spațiului, ale căror direcții și lungimi reprezintă vectorul $\nu(\vec{r})$.

Exemple de câmpuri vectoriale: câmpurile de electricitate sau câmpurile de forță.

Gradientul unui câmp scalar $\varphi = \varphi(x, y, z) = \varphi(\vec{r})$ este vectorul

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}.$$

Vectorul $\text{grad } \varphi$ este perpendicular pe suprafețele de nivel corespunzătoare câmpului scalar φ .

Derivata lui φ pe o anumită direcție este egală cu proiecția gradientului pe această direcție.

Derivata unui câmp scalar într-un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ după o direcție $\vec{s}$ este

$$\frac{d\varphi}{ds}(M) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cos \gamma,$$

unde $\cos \alpha$, $\cos \beta$ și $\cos \gamma$ semnifică cosinusurile directoare ale direcției $\vec{s}$.

Divergența unui câmp vectorial

$$\vec{\nu}(x, y, z) = P(x, y, z) \cdot \vec{i} + Q(x, y, z) \cdot \vec{j} + R(x, y, z) \cdot \vec{k}$$



este un câmp scalar, obținut conform formulei

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Un câmp de divergență nulă se numește *solenoidal*.

În analiza vectorială, divergența este un operator care măsoară cât de mult un câmp vectorial iese din sau intră într-un punct; divergența unui câmp vectorial este un scalar. Pentru un câmp vectorial care reprezintă viteza de expansiune a aerului atunci când acesta este încălzit, divergența câmpului de viteze are o valoare pozitivă deoarece aerul se dilată. Dacă aerul se răcește și se contractă, divergența este negativă.

Rotorul câmpului vectorial $\vec{v}$ este un alt câmp vectorial, dedus pe baza formulei:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \vec{k}.$$

În analiza vectorială, rotorul este un operator vectorial care evidențiază "rata de rotație" a unui câmp vectorial, adică direcția axei de rotație și magnitudinea rotației.

Prin introducerea gradientului s-a obținut dintr-un câmp scalar $\varphi = \varphi(x, y, z) = \varphi(\vec{r})$ un câmp vectorial $\operatorname{grad} \varphi$. În general, reciproca nu este adevărată, adică un câmp vectorial nu poate fi considerat întotdeauna gradientul unui câmp scalar. Câmpurile vectoriale $\vec{v}$ pentru care acest lucru este posibil se numesc *conservative* sau *potențiale* iar φ reprezintă *potențialul scalar* al câmpului vectorial $\vec{v}$.

Câmpurile vectoriale $\vec{v}$ pentru care $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ se numesc *irotaționale* sau *lamelare*; pentru aceste câmpuri există o funcție $\varphi(x, y, z)$ potențial scalar a.î.

$$\varphi(x, y, z) = \int P(x, y, z) dx + \int Q(x, y, z) dy + \int R(x, y, z) dz + C.$$

Mathcad	Mathematica
Reprezentarea curbelor de nivel ale unui câmp scalar	
butonul  din paleta <i>Graph</i>	funcția <code>ContourPlot[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]</code> în zona <i>Basic Commands</i> .
Setarea variabilelor unui sistem de coordonate	
nu este posibil	<code>SetCoordinates[coordsys[c1, c2, c3]]</code>
Calcularea gradientului unui câmpului scalar	
Jacob(f(x),x)	<code>Grad[f]</code>
Determinarea rotorului unui câmp vectorial	



nu există funcție predefinită	<code>Curl[f]</code>
Determinarea divergenței unui câmp vectorial	
nu există funcție predefinită	<code>Div[f]</code>
Calcularea și reprezentarea câmpului vectorial gradient	
nu este posibil	<code>GradientFieldPlot[f,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]</code>

L5.2. Fundamentele teoriei câmpurilor

Exemplul L5.1. Să se calculeze gradientul următorului câmp scalar:

$$f(x, y) = (y-1)^2 e^{-(x+1)^2 - y^2} - \frac{10}{3} \left(-x^5 + \frac{1}{5} y - y^3 \right) e^{-x^2 - y^2} - \frac{1}{9} e^{-x^2 - (y+1)^2}$$

și apoi să se reprezinte grafic alături de curbele de nivel ale lui $f(x, y)$.

Mathematica:

```

In[1]:= f[x_, y_] := (y - 1)^2 * e^{-(x+1)^2 - y^2} - \frac{10}{3} * \left( -x^5 + \frac{1}{5} * y - y^3 \right) * e^{-x^2 - y^2} - \frac{1}{9} * e^{-x^2 - (y+1)^2};

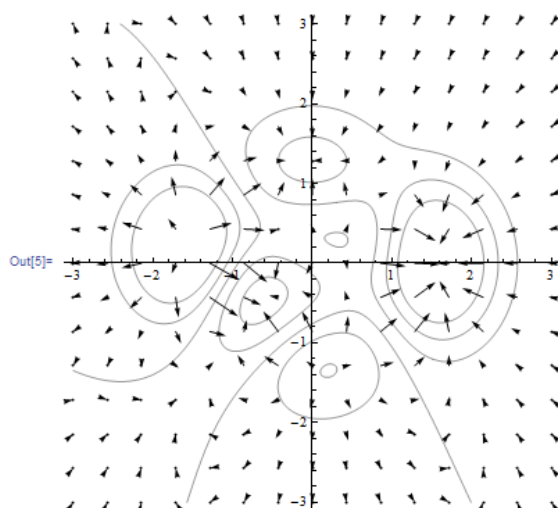
In[2]:= Needs["VectorFieldPlots`"]

In[3]:= conf = ContourPlot[f[x, y], {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, PlotPoints -> 60, ContourShading -> False, Frame -> False, Axes -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}];

In[4]:= gradfplot = GradientFieldPlot[f[x, y], {x, -3, 3}, {y, -3, 3}];

In[5]:= Show[conf, gradfplot]

```





Exemplul L5.2. Să se calculeze gradientul câmpului scalar:

$$f(x, y, z) = x^4 + xy^2 + y^3 + x^2z + 1$$

Mathcad:

$$f(x, y, z) := x^4 + x \cdot y^2 + y^3 + x^2 \cdot z + 1$$

$$\text{grad}f(x, y, z) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}f(x, y, z) \\ \frac{d}{dy}f(x, y, z) \\ \frac{d}{dz}f(x, y, z) \end{pmatrix} \quad \text{grad}f(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \cdot x^3 + y^2 + 2 \cdot x \cdot z \\ 2 \cdot x \cdot y + 3 \cdot y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Mathematica:

```
In[10]:= Needs["VectorAnalysis`"]
In[11]:= SetCoordinates[Cartesian]
Out[11]:= Cartesian[Xx, Yy, Zz]
In[12]:= SetCoordinates[Cartesian[x, y, z]]
Out[12]:= Cartesian[x, y, z]
In[13]:= ϕ = x^4 + x * y^2 + y^3 + x^2 * z + 1;
In[14]:= Grad[ϕ]
Out[14]:= {4 x^3 + y^2 + 2 x z, 2 x y + 3 y^2, x^2}
```

Exemplul L5.3. Dacă se notează

$$\begin{cases} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

determinați gradientul câmpului scalar $\varphi(r) = \ln r$.



Mathcad:

$$\varphi(x, y, z) := \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

$$w(x, y, z) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} \varphi(x, y, z) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{simplify}} \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \end{pmatrix}$$

$$w(x, y, z) \text{ substitute } x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{x}{r^2} \\ \frac{y}{r^2} \\ \frac{z}{r^2} \end{pmatrix}$$

Mathematica:

In[1]:= Needs["VectorAnalysis`"]

In[12]:= SetCoordinates[Cartesian]

Out[12]:= Cartesian[Xx, Yy, Zz]

In[9]:= $\varphi = \text{Log}[\sqrt{Xx^2 + Yy^2 + Zz^2}]$;

In[13]:= A = Simplify[Grad[φ]];

In[15]:= A /. Xx² + Yy² + Zz² → r²

Out[15]:= $\left\{ \frac{Xx}{r^2}, \frac{Yy}{r^2}, \frac{Zz}{r^2} \right\}$

Exemplul L5.4. Găsiți gradientul câmpului scalar

$$\varphi(x, y, z) = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2).$$

Mathcad:

$$f(x) := \begin{bmatrix} x_0 + x_1 + x_2 \\ (x_0)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jacob}(f(x), x) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 \cdot x_0 & 2 \cdot x_1 & 2 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$



Mathematica:

```
In[25]:= MatrixForm[D[{x + y + z, x^2 + y^2 + z^2}, {{x, y, z}}]]
Out[25]//MatrixForm=
      ( 1 1 1 )
      ( 2 x 2 y 2 z )
```

Exemplul L5.5. Calculați derivata câmpului scalar

$$\varphi(x, y) = x^2 - y^2 + xy$$

în punctul $M(2, 2)$ într-o direcție $\vec{s}$, care face unghiul de 30° cu axa Ox .

Mathcad:

```
φ(x,y) := x^2 - y^2 + x·y
x0 := 2    y0 := 2
∂/∂x0 φ(x0,y0)·cos(30·deg) + ∂/∂y0 φ(x0,y0)·cos(60·deg) = 4.196
```

Mathematica:

```
In[10]:= φ[x_, y_] := x^2 - y^2 + x * y
In[11]:= (D[φ[x, y], x] /. {x -> 2, y -> 2}) * Cos[30 Degree] +
          (D[φ[x, y], y] /. {x -> 2, y -> 2}) * Cos[60 Degree]
Out[11]= -1 + 3 √3
```

Exemplul L5.6. Fie câmpul scalar

$$\varphi(x, y, z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Să se calculeze derivata lui φ în punctul $M(1, 1, 1)$ după direcția $\overrightarrow{MN}$ știind că $N(2, 3, -2)$.



Mathcad:

$$\varphi(x, y, z) := \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$M := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad N := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x_0 := 1 \quad y_0 := 1 \quad z_0 := 1$$

$$u := \frac{N - M}{|N - M|}$$

$$v := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} \varphi(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial}{\partial y_0} \varphi(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial}{\partial z_0} \varphi(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

$$u \cdot v = -1.2027$$

Mathematica:

```
In[63]:= m := {1, 1, 1};
In[64]:= n := {2, 3, -2};
In[65]:= s := n - m
In[66]:= u := s / Norm[s]
In[67]:=  $\phi[x_, y_, z_] := \text{ArcSin}[z / \text{Sqrt}[x^2 + y^2]]$ ;
In[68]:= w := {D[ $\phi[x, y, z]$ , x] /. {x -> 1, y -> 1, z -> 1},
D[ $\phi[x, y, z]$ , y] /. {x -> 1, y -> 1, z -> 1}, D[ $\phi[x, y, z]$ , z] /. {x -> 1, y -> 1, z -> 1}}
In[69]:= SetPrecision[u.w, 5]
Out[69]= -1.2027
```

Exemplul L5.7. Să se determine divergența și rotorul câmpului vectorial

$$\vec{v} = xz^3 \vec{i} - 2x^2yz \vec{j} + 2yz^4 \vec{k}$$

în punctul $M(1, -1, 1)$.



Mathcad:

$$f(x) := \begin{bmatrix} x_0 \cdot (x_2)^3 \\ -2 \cdot (x_0)^2 \cdot x_1 \cdot x_2 \\ 2 \cdot x_1 \cdot (x_2)^4 \end{bmatrix} \quad u := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v(x) := \text{Jacob}(f(x), x) \quad w(x) := \begin{pmatrix} v(x)_{0,0} \\ v(x)_{1,1} \\ v(x)_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=0}^2 w(x)_i \cdot \text{substitute}, x_0 = u_0, x_1 = u_1, x_2 = u_2 \rightarrow -9$$

$$y(a, b, c) := \begin{pmatrix} f(x)_0 \\ f(x)_1 \\ f(x)_2 \end{pmatrix} \text{substitute}, x_0 = a, x_1 = b, x_2 = c \rightarrow \begin{pmatrix} a \cdot c^3 \\ -2 \cdot a^2 \cdot b \cdot c \\ 2 \cdot b \cdot c^4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial b} y(a, b, c)_2 - \frac{\partial}{\partial c} y(a, b, c)_1 \\ \frac{\partial}{\partial c} y(a, b, c)_0 - \frac{\partial}{\partial a} y(a, b, c)_2 \\ \frac{\partial}{\partial a} y(a, b, c)_1 - \frac{\partial}{\partial b} y(a, b, c)_0 \end{pmatrix} \text{substitute}, a = u_0, b = u_1, c = u_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Mathematica:

```
In[141]:= Needs["VectorAnalysis`"]
In[142]:= v := {Xx * Zz^3, -2 * Xx^2 * Yy * Zz, 2 * Yy * Zz^4}
In[143]:= Div[v];
In[144]:= % /. {Xx -> 1, Yy -> -1, Zz -> 1}
Out[144]= -9

In[145]:= Curl[v]
Out[145]= {2 Xx^2 Yy + 2 Zz^4, 3 Xx Zz^2, -4 Xx Yy Zz}
In[146]:= % /. {Xx -> 1, Yy -> -1, Zz -> 1}
Out[146]= {0, 3, 4}
```

Exemplul L5.8. Determinați divergența, rotorul și potențialul scalar $\varphi(x, y, z)$ ale câmpului vectorial:

$$\vec{v} = \sin x \cdot \vec{i} + y e^{y^2} \cdot \vec{j} + \cos 2z \cdot \vec{k}.$$



Mathematica:

```
In[183]:= Needs["VectorAnalysis`"]

In[184]:= v := {Sin[Xx], Yy * Exp[Yy^2], Cos[2 * Zz]}

In[185]:= Div[v]

Out[185]= e^{Yy^2} + 2 e^{Yy^2} Yy^2 + Cos[Xx] - 2 Sin[2 Zz]

In[186]:= Curl[v]

Out[186]= {0, 0, 0}

In[187]:= Integrate[v[[1]], Xx] + Integrate[v[[2]], Yy] + Integrate[v[[3]], Zz]

Out[187]= \frac{e^{Yy^2}}{2} - Cos[Xx] + \frac{1}{2} Sin[2 Zz]
```

L5.3. Exerciții propuse

1. Să se calculeze gradientul următorului câmp scalar:

(a) $f(x, y) = 5x^2 - 8xy + 5y^2 - 12x + 6y$

(b) $f(x, y) = 6x^2y - 3x^4 - 2y^3$

și apoi să se reprezinte grafic alături de curbele de nivel ale lui $f(x, y)$.

2. Să se calculeze gradientul câmpului scalar:

(a) $f(x, y, z) = \arctg \frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - yz - xz}$

(b) $f(x, y, z) = xyz e^{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. Dacă se notează

$$\begin{cases} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

determinați gradientul câmpului scalar $\varphi(r) = r^n$.

4. Găsiți gradientul câmpului scalar $\varphi(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2)$

5. Dacă se notează

$$\begin{cases} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$



determinați gradientul câmpului vectorial $\vec{v} = f(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$.

6. Fie câmpul scalar $\varphi(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Să se calculeze derivata lui φ în punctul $(0, 0, 1)$ după direcția $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
7. Fie câmpul scalar $\varphi(x, y) = 2x^2 - 3y^2$. Să se calculeze derivata lui φ în punctul $M(0, 1)$ într-o direcție care face cu axa Ox un unghi de 120° .
8. Fie câmpul scalar $\varphi(x, y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$. Să se calculeze derivata lui φ în punctul $M(1, 2)$ după direcția $\overrightarrow{MN}$ știind că $N(4, 6)$.
9. Să se determine divergența câmpului vectorial

$$\vec{v} = xyz \cdot \vec{i} + y^2(z - x) \cdot \vec{j} + \frac{z}{x - y} \cdot \vec{k}, x \neq y$$

în punctul $M(1, 0, -1)$.

10. Determinați divergența, rotorul și potențialul scalar $\varphi(x, y, z)$ corespunzătoare câmpului vectorial: $\vec{v} = (3x^2 + 2x) \cdot \vec{i} - (z - 3y^2) \cdot \vec{j} + (y + 2z) \cdot \vec{k}$.

L5.4. Bibliografie

1. M. L. Abell, J. P. Braselton, *Mathematica by Example*, Elsevier Academic Press, 2004.
2. G. Anastassiou, I. Iatan, *Intelligent Routines: Solving Mathematical Analysis with Matlab, Mathcad, Mathematica and Maple*, Springer, 2013.
3. I. Armeanu, V. Petrehuș, *Matematici avansate cu aplicații*, Sitech, Craiova, 2009.
1. M. Ariciuc, M. Gavrilă, C. Costinescu, P. Matei, *Culegere de probleme de Analiză matematică*, Matrix Rom, București, 2002.
2. G. Baranenko, B. Demidovich, V. E. menko, S. Kogan, G. Lunts, E. Porshneva, E. Sycheva, S. Frolov, R. Shostak, A. Yanpolsky, *3193 Problems in Mathematical Analysis*, 2011, <http://mpec.sc.mahidol.ac.th/RADOK/phymath/mat12/start.htm>.
3. O. Cira, *Lecții de Mathcad 2001 Professional*, ed. Grupul microInformatica, Cluj-Napoca, 2003.
4. I. Iatan, *Îndrumător de laborator în Matlab 7.0*, ed. Conspress, București, 2009.
5. V. Postelnicu, S. Coatu, *Mică enciclopedie matematică*, ed. Tehnică, București, 1980.
6. <http://ro.wikipedia.org/wiki/Divergen%C8%9B%C4%83>



L6. Lecția de Laborator 6. Diferențiabilitatea funcțiilor în Mathcad și Mathematica

L6.1. Breviar teoretic

O funcție $f(x, y)$ are o valoare de *maxim* (*minim*) $f(a, b)$ în punctul $P(a, b)$, dacă pentru orice punct $P'(x, y)$ din vecinătatea lui P are loc inegalitatea $f(a, b) > f(x, y)$ (respectiv, $f(a, b) < f(x, y)$). Termenul de maxim și minim al unei funcții este denumit *extrem*. În mod similar se pot defini extremele unei funcții de trei sau mai multe variabile.

Propoziția L6.1 (condiții necesare pentru un extrem). Punctele în care o funcție diferențiabilă $f(x, y)$ are un extrem, numite puncte staționare se determină rezolvând sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Propoziția L6.2 (condiții suficiente pentru un extrem). Fie $P(a, b)$ un punct staționar al funcției $f(x, y)$, adică $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$. Se construiește *discriminantul*:

$$E = f''_{xy}(a, b)^2 - f''_{x^2}(a, b) \cdot f''_{y^2}(a, b). \text{ Atunci:}$$

A) dacă $E < 0$, funcția are un extrem în punctul $P(a, b)$, adică:

- 1) un minim local dacă $f''_{x^2}(a, b) > 0$ (sau $f''_{y^2}(a, b) > 0$),
- 2) un maxim local dacă $f''_{x^2}(a, b) < 0$ (sau $f''_{y^2}(a, b) < 0$);

B) dacă $E > 0$ atunci funcția nu are un extrem în punctul $P(a, b)$,

C) dacă $E = 0$ nu se poate decide dacă funcția are sau nu un extrem în punctul $P(a, b)$.

Observația L6.3. Pentru o funcție de trei variabile, pentru fiecare punct staționar

$$P(a, b, c) \text{ al funcției } f(x, y, z) \text{ se construiește matricea } A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}. \text{ Dacă:}$$



- A este o matrice pozitiv definită, atunci punctul $P(a,b,c)$ este un punct de minim local al lui f ;
- A este o matrice negativ definită, atunci punctul $P(a,b,c)$ este un punct de maxim local al lui f ;
- A nu este nici pozitiv nici negativ definită, atunci punctul $P(a,b,c)$ nu este un punct de extrem;
- $A = O_3$ nu putem lua nici o decizie asupra punctului $P(a,b,c)$.

Mathematica dispune de funcțiile specializate

- **FindMaximum[expr, {var, estimate}]**
- **FindMinimum[expr, {var, estimate}]**

pentru determinarea extremelor unei funcții, care scutesc construirea unui program menit să implementeze metoda matematică, utilizată pentru determinarea extremelor respective.

Acest lucru nu se întâmplă și în Mathcad, de aceea este necesar să construim un program corespunzător.

Realizarea programelor în MathCAD se bazează pe utilizarea paletelor *Programming*. Scrierea unui program presupune:

- introducerea numelui programului,
- inserarea unei perechi de paranteze deschise, unde se scrie lista parametrilor formali (lista poate fi și vidă), urmate de simbolul “:”;
- acționarea butonului *Add Line* din paleta *Programming*, în scopul inserării unei noi linii.

Atribuirea locală se realizează accesând butonul , din paleta *Programming*, fiind situat alături de butoanele asociate instrucțiunilor *if*, *otherwise*, *for*, *while*, *break*, *continue*, *return*, *on error*.

Un program Mathcad se apelează prin numele acestuia, urmat de lista parametrilor actuali, scrisă între paranteze rotunde și apoi de semnul “=”, care determină afișarea rezultatului returnat de funcție.

Pentru o funcție vectorială $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$, unde $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(\forall) i = \overline{1, 3}$, matricea *Jacobiană* atașată funcției f în punctul $a \in \mathbb{R}^3$ este matricea:



$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(a) \end{pmatrix}.$$

Determinarea matricei Jacobiene	
Mathcad	Mathematica
Jacob(f(x),x)	JacobianMatrix[pf]

Diferențialele de ordinul întâi și al doilea pentru funcția $z = f(x, y)$, în punctul (x_0, y_0) se determină cu ajutorul formulelor:

$$\begin{cases} d f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy \\ d^2 f(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) dy^2. \end{cases}$$

Calcularea diferențialelor pentru o funcție	
Mathcad	Mathematica
nu există funcții predefinite, de aceea se aplică formulele	Dt[f] diferențiala de ordinul întâi Dt[Dt[f]] diferențiala de ordinul al doilea

Reguli de derivare a funcțiilor compuse:

Cazul 1. Dacă $z = f(x, y)$ este o funcție diferențiabilă, unde x și y sunt funcțiile diferențiabile, ce depind de variabila independentă t : $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, atunci derivata funcției compuse $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ se calculează conform formulei:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Cazul 2. Dacă $z = f(x, y)$ este o funcție diferențiabilă, unde x și y sunt funcțiile diferențiabile, ce depind de variabilele independente u și v : $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ atunci derivatele parțiale în raport cu u și v sunt date de:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

Deși derivarea funcțiilor compuse se poate realiza și în Mathcad precum este posibil în Mathematica, totuși dacă se realizează schimbarea variabilelor independente, atunci nu mai



este de competența Mathcad-ului să calculeze derivatele respective, ci doar a software-ului Mathematica.

Metodele de rezolvare a ecuațiilor și sistemelor de ecuații diferențiale se poate implementa pe calculator astfel:

Mathcad	Mathematica
Determinarea soluției generale a unei ecuații diferențiale	
nu există funcții predefinite	DSolve [$y'[x] == f[x, y[x]]$, $y[x], x$].
Determinarea soluției generale a unui sistem de ecuații diferențiale	
nu există funcții predefinite	DSolve [{ $eqn_1, eqn_2, \dots$ }, { $y_1, y_2, \dots$ }, x]
Determinarea soluției particulare a unei probleme Cauchy asociată unei ecuații diferențiale	
Odesolve (x, b , [step])	NDSolve [{ $y'[x] == f[x, y[x]]$, $y[x_0] == y_0$ }, $y[x], \{x, a, b\}$] DSolve [{ $y'[x] == f[x, y[x]]$, $y[x_0] == y_0$ }, $y[x], x$]
Determinarea soluției particulare a unei probleme Cauchy asociată unui sistem de ecuații diferențiale	
Odesolve ([vf], x, b , [step])	NDSolve [{ $x'[t] == f[t, x[t]]$, $y'[t] == g[t, y[t]]$, $x[t_0] == x_0$, $y[t_0] == y_0$ }, { $x[t], y[t]$ }, { t, a, b }] DSolve [{ $x'[t] == f[t, x[t]]$, $y'[t] == g[t, y[t]]$, $x[t_0] == x_0$, $y[t_0] == y_0$ }, { $x[t], y[t]$ }, t]
Rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale	
există numai funcții care rezolvă anumite ecuații cu derivate parțiale (funcțiile relax , multigrid), ci nu orice tip de ecuație	DSolve [$eqn, y, \{x_1, x_2, \dots\}$] NDSolve [$eqns, y, \{x, x_{min}, x_{max}\}, \{t, t_{min}, t_{max}\}$]

Fiecare ecuație diferențială $y' = f(x, y)$ realizează o corespondență între un punct din planul xOy , pentru care funcția $f(x, y)$ este definită și o valoare a derivatei funcției căutate $y(x)$, care determină direcția tangentei la graficul funcției $y(x)$. Astfel, rezultă câmpul direcțiilor unei ecuații diferențiale de ordinul întâi. Reprezentarea grafică a acestui câmp este posibilă numai în Mathematica (ci nu și în Mathcad):

VectorFieldPlot[{ f_x, f_y }, { x, x_{min}, x_{max} }, { y, y_{min}, y_{max} }]



L6.2. Diferențiabilitatea funcțiilor de mai multe variabile

Exemplul L6.1. Determinați extremele funcției:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{2x+3y}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Mathcad:

$$\begin{aligned} f(x, y) &:= (x^2 + y^2) \cdot e^{2 \cdot x + 3 \cdot y} \\ x &:= 1 \quad y := 1 \quad h(u, v) &:= \frac{\partial}{\partial u} f(u, v) \quad \underline{m}(u, v) &:= \frac{\partial}{\partial v} f(u, v) \\ \text{Given} \\ h(x, y) &= 0 \quad m(x, y) = 0 \\ a &:= \text{Find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{local}(a) &:= \begin{array}{l} x \leftarrow a_0 \\ y \leftarrow a_1 \\ p \leftarrow \left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dy} f(x, y) \right)^2 \\ q \leftarrow \frac{d^2}{dx^2} f(x, y) \\ r \leftarrow \frac{d^2}{dy^2} f(x, y) \\ E \leftarrow p - q \cdot r \\ d_0 \leftarrow E \\ d_1 \leftarrow q \\ d \end{array} \\ \text{local}(a) &= \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ f(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Așadar, $(0, 0)$ este punct de minim local, iar valoarea minimă a funcției este 0.



Mathematica:

```
In[9]:= f[x_, y_] := (x^2 + y^2) * Exp[2 * x + 3 * y]

In[10]:= FindMinimum[{f[x, y], x >= 0, y >= 0}, {x, y}]

Out[10]:= {1.935 * 10^-6, {x -> 0.00107021, y -> 0.000883406}}
```

Exemplul L6.2. Calculați $\frac{\partial z}{\partial x}$ dacă

$$z = \varphi(x^2 + y^2).$$

Mathcad:

$$z(x, y, \varphi) := \varphi(x^2 + y^2)$$

$$\frac{d}{dx} z(x, y, \varphi) \rightarrow 2 \cdot x \cdot \left. \frac{d}{dx_0} \varphi(x_0) \right|_{x_0 \leftarrow x^2 + y^2}$$

Mathematica:

```
In[85]:= z[x_, y_] := \varphi[x^2 + y^2]

In[86]:= D[z[x, y], x]

Out[86]:= 2 x \varphi'[x^2 + y^2]
```

Exemplul L6.3. Arătați că funcția

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

verifică ecuația:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$



Mathcad:

$$z(x, y, \varphi, \psi) := x \cdot \varphi \left(\frac{y}{x} \right) + \psi \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$w1(x, y, \varphi, \psi) := x^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} z(x, y, \varphi, \psi) + 2 \cdot x y \cdot \frac{d}{dx} \frac{d}{dy} z(x, y, \varphi, \psi) + y^2 \cdot \frac{d^2}{dy^2} z(x, y, \varphi, \psi)$$

$$w1(x, y, \varphi, \psi) \text{ expand} \rightarrow 0$$

Mathematica:

```
In[27]:= z[x_, y_] := x * φ (y / x) + ψ (y / x)
In[28]:= Expand [x^2 * D[z[x, y], {x, 2}] + 2 * x * y * D[z[x, y], x, y] + y^2 * D[z[x, y], {y, 2}]]
Out[28]= 0
```

Exemplul L6.4. Transformați ecuația următoare

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$$

dacă

$$\begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Mathematica:

```
In[27]:= z[x_, y_] := r[x, y]
In[28]:= u[x_, y_] := x;
In[29]:= v[x_, y_] := y / x;
In[30]:= a = Expand [x * D[z[u[x, y], v[x, y]], x] + y * D[z[u[x, y], v[x, y]], y] -
z[u[x, y], v[x, y]]];
In[31]:= a /. x -> u;
In[32]:= % /. y / x -> v
Out[32]= -r[u, y/u] + u r^(1,0)[u, y/u]
```



Exemplul L6.5. Calculați diferențialele de ordinul întâi și al doilea, $d f(1,2)$ și $d^2 f(1,2)$, unde

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 4 \cdot \ln x - 10 \cdot \ln y.$$

Mathcad:

$$\begin{aligned} f(x, y) &:= x^2 - x \cdot y + 2 \cdot y^2 + 3 \cdot x - 5y \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \cdot dy \text{ substitute, } x=1, y=1 &\rightarrow 4 \cdot dx - 2 \cdot dy \\ \frac{d^2}{dx^2} f(x, y) \cdot dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \cdot dx dy + \frac{d^2}{dy^2} f(x, y) \cdot dy^2 \text{ substitute, } x=1, y=1 &\rightarrow 2 \cdot dx^2 + 4 \cdot dy^2 - 2 \cdot dx dy \end{aligned}$$

Mathematica:

```
In[43]:= f[x_, y_] := x^2 - x*y + 2*y^2 + 3*x - 5*y
In[54]:= Dt[f[x, y]] /. {Dt[x] -> dx, Dt[y] -> dy, x -> 1, y -> 1}
Out[54]= 4 dx - 2 dy

In[68]:= Dt[Dt[f[x, y]]] /. {Dt[x] -> dx, Dt[y] -> dy, Dt[Dt[x]] -> 0, Dt[Dt[y]] -> 0, x -> 1, y -> 1}
Out[68]= 2 dx^2 - 2 dx dy + 4 dy^2
```

Exemplul L6.6. Determinați soluția generală a ecuației diferențiale liniară neomogenă, cu coeficienți constanți:

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x}$$

Mathematica:

```
In[16]:= Simplify[
  DSolve[D[y[x], {x, 2}] + 3*D[y[x], x] + 2*y[x] ==
    1 / (1 + Exp[x]), y[x], x]]
Out[16]= {{y[x] -> e^{-2x} (C[1] + e^x (-1 + C[2]) + (1 + e^x) Log[1 + e^x])}}
```



Exemplul L6.7. Se consideră problema Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = (t^2 - y^2) \sin y \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Determinați $y(1)$ și reprezentați grafic $y(t)$.

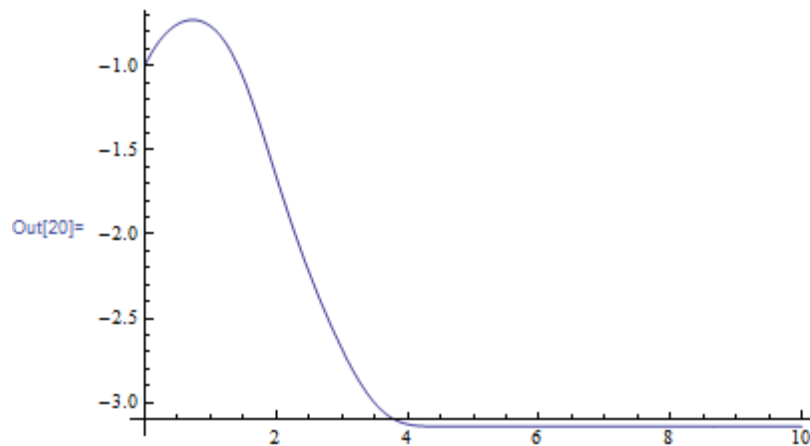
Mathematica:

```
In[17]:= sol = NDSolve[{y'[t] == (t^2 - y[t]^2) * Sin[y[t]], y[0] == -1}, y[t], {t, 0, 1000}];
```

```
In[19]:= sol /. t -> 1
```

```
Out[19]:= {{y[1] -> -0.766013}}
```

```
In[20]:= Plot[Evaluate[y[t] /. sol], {t, 0, 10}]
```



Exemplul L6.8. Reprezentați grafic câmpul direcțiilor ecuației diferențiale

$$\frac{dy}{dt} = y \left(1 - \frac{y}{19} \right) - \frac{5y^2}{4 + y^2}$$

și soluțiile sale care satisfac condiția inițială: $y(0)=0.5$, $y(0)=2$, $y(0)=4$.



Mathematica:

```
In[1]:= Needs["VectorFieldPlots`"]

In[16]:= eq = y'[t] == y[t] * (1 - y[t] / 19) -  $\frac{5 * y[t]^2}{4 + y[t]^2}$ ;

In[20]:= n1 = NDSolve[{eq, y[0] == 0.5}, y[t], {t, 0, 10}];

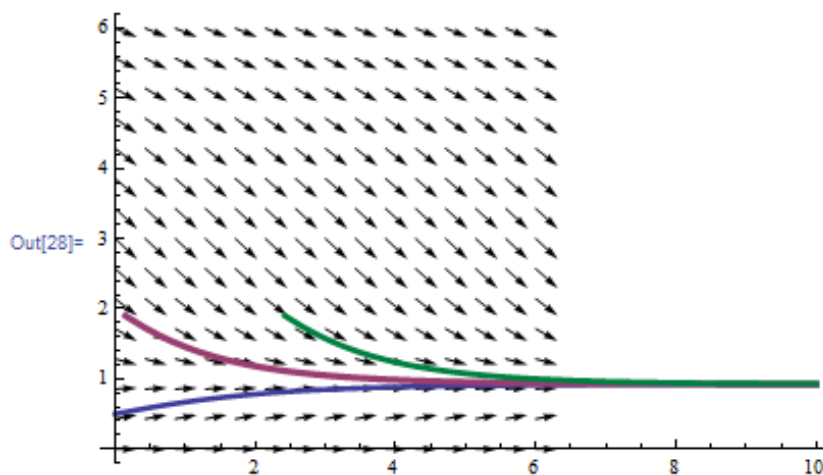
In[21]:= n2 = NDSolve[{eq, y[0] == 2}, y[t], {t, 0, 10}];

In[22]:= n3 = NDSolve[{eq, y[0] == 4}, y[t], {t, 0, 10}];

In[27]:= vfp = VectorFieldPlot[ $\left\{1, y * (1 - y / 19) - \frac{5 * y^2}{4 + y^2}\right\}$ , {t, 0, 6}, {y, 0, 6}, Axes -> Automatic];

In[25]:= solplot = Plot[Evaluate[y[t] /. {n1, n2, n3}], {t, 0, 10}];

In[28]:= Show[vfp, solplot]
```



Exemplul L6.9. Reprezentați grafic soluția problemei Cauchy:

$$\begin{cases} y''' + 4y' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -1. \end{cases}$$

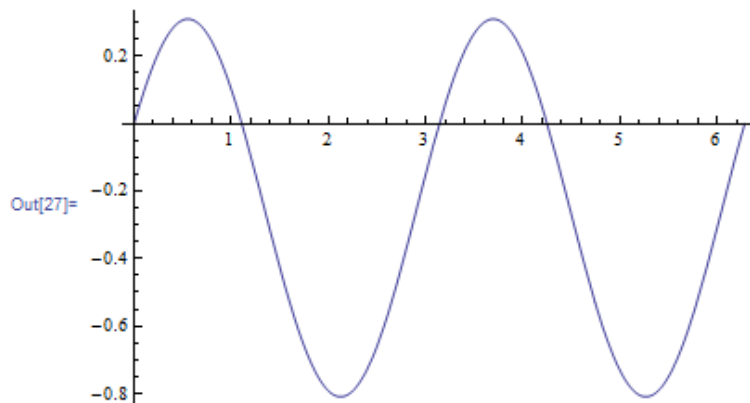


Mathematica:

```
In[26]:= sol = DSolve[{y'''[t] + 4*y'[t] == 0, y[0] == 0, y'[0] == 1, y''[0] == -1}, y[t], t]
```

```
Out[26]:= {{y[t] -> 1/4 (-1 + Cos[2 t] + 2 Sin[2 t])}}
```

```
In[27]:= Plot[Evaluate[y[t] /. sol], {t, 0, 2*Pi}]
```



Exemplul L6.10. Să se rezolve următorul sistem de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}y \\ y' = -\frac{1}{8}x \end{cases}$$

și să se reprezinte grafic câmpul direcțiilor, împreună cu soluțiile sale.

Mathematica:

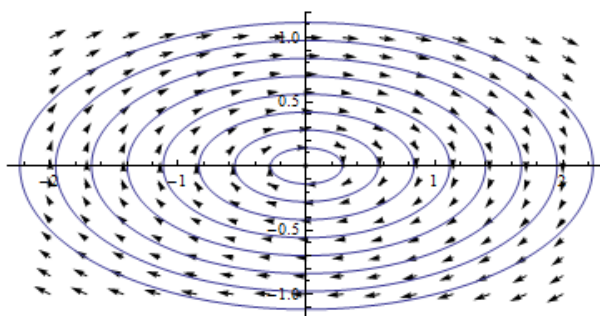
```
In[79]:= vfp = VectorFieldPlot[{y/2, -x/8}, {x, -2, 2}, {y, -1, 1}, Axes -> Automatic];
```

```
In[75]:= sol = DSolve[{x'[t] == y[t]/2, y'[t] == -x[t]/8, x[0] == x0, y[0] == y0}, {x[t], y[t]}, t]
```

```
Out[75]:= {{x[t] -> x0 Cos[t/4] + 2 y0 Sin[t/4], y[t] -> 1/2 (2 y0 Cos[t/4] - x0 Sin[t/4])}}
```

```
In[103]:= ta = ParametricPlot[Table[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol /. {x0 -> i, y0 -> i}], {i, 0, 1, 1/8}], {t, -4*Pi, 4*Pi}];
```

```
In[106]:= Show[vfp, ta]
```





Exemplul L6.11. Rezolvați problema Cauchy:

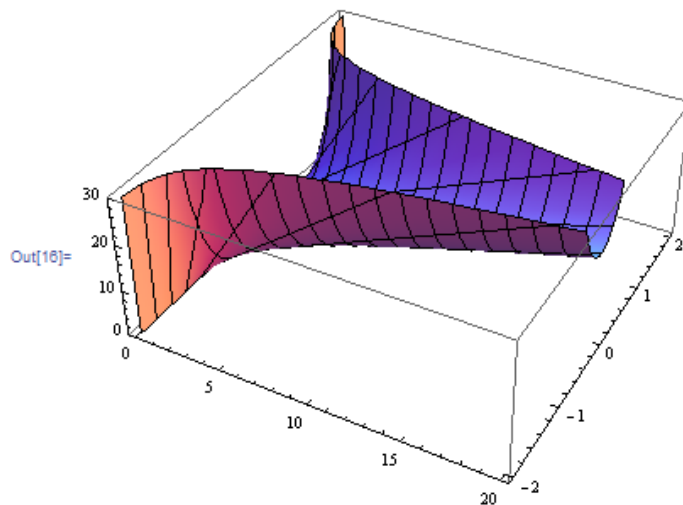
$$\begin{cases} -3xt \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = xt \\ u(x, 0) = x \end{cases}$$

și reprezentați grafic soluția obținută.

Mathematica:

```
In[15]:= solgen = NDSolve[{-3*x*t*Derivative[1,0][u][x,t] + Derivative[0,1][u][x,t] == x*t, u[x,0] == x}, u, {x, 0, 20}, {t, -2, 2}];
```

```
In[16]:= Plot3D[u[x,t] /. solgen, {x, 0, 20}, {t, -2, 2}, PlotPoints -> 30, PlotRange -> {0, 30}, ClippingStyle -> None]
```



L6.3. Exerciții propuse

1. Să se determine punctele de extremum local ale funcției:

a) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - y^3 + 7, (x, y) \in \mathbb{R}^2$

b) $f(x, y) = -2x^2 + 2xy - 5y^2 + 6x + 6y.$

2. Să se arate ca funcția

$$z(x, y) = e^y \varphi \left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}} \right)$$

verifică ecuația

$$(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$$



3. Fie

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad D \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad F(\rho, \theta) = (f_1(\rho, \theta), f_2(\rho, \theta)) = (a\rho \cos \theta, b\rho \sin \theta).$$

Calculați determinantul funcțional (jacobianul) al funcțiilor f_1, f_2 , adică

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(\rho, \theta)}.$$

4. Fie $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad D \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^2,$

$$F(\rho, \theta, \varphi) = (f_1(\rho, \theta, \varphi), f_2(\rho, \theta, \varphi), f_3(\rho, \theta, \varphi)) = (\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta).$$

Calculați determinantul funcțional (jacobianul) al funcțiilor f_1, f_2, f_3 , adică

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(\rho, \theta, \varphi)}.$$

5. Determinați valoarea funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = ((x + y + z)^2, 2x + y - 2z, 3x^2 + 2xy - 12xz - 18zy)$$

în punctul $(-1.05, 0.01, -1.03)$.

6. Găsiți matricea Jacobiană $J_f(-1, 0, -1)$ asociată funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definită prin:

$$f(x, y, z) = ((x + y + z)^2, 2x + y - 2z, 3x^2 + 2xy - 12xz - 18zy)$$

7. Găsiți matricea Jacobiană $J_f(a, b, c)$ asociată funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definită prin:

$$f(x, y, z) = ((x - a)(x - b), (x - b)(x - c), (x - c)(x - a))$$

8. Ce devine ecuația

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1 + y^2} \frac{\partial z}{\partial y} - xy = 0$$

în urma schimbării de variabile

$$\begin{cases} u = \ln x \\ v = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) \end{cases}.$$

9. Determinați soluția generală a ecuației diferențiale:

$$y''' - 3y' + 2y = xe^x$$

10. Să se reprezinte grafic curba definită ca soluție a sistemului de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} x' + x + 5y = 0 \\ y' - x - y = 0 \end{cases}$$

cu condițiile inițiale $x(\pi) = 1, y(\pi) = 1$.



11. Să se rezolve următorul sistem de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{4}x + 2y \\ y' = -8x - \frac{1}{4}y \end{cases}$$

și să se reprezinte grafic câmpul direcțiilor, împreună cu soluțiile sale.

12. Reprezentați grafic soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases} t \frac{\partial u}{\partial t} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} = t + x, & t \in [1, 2], x \in [2, 3] \\ u(1, x) = 1 + x \end{cases}$$

L6.3. Bibliografie

1. M. L. Abell, J. P. Braselton, *Mathematica by Example*, Elsevier Academic Press, 2004.
2. G. Anastassiou, I. Iatan, *Intelligent Routines: Solving Mathematical Analysis with Matlab, Mathcad, Mathematica and Maple*, Springer, 2013.
3. M. Ariciuc, M. Gavrila, C. Costinescu, P. Matei, *Culegere de probleme de Analiză matematică*, Matrix Rom, București, 2002.
4. I. Armeanu, V. Petrehuș, *Matematici avansate cu aplicații*, Sitech, Craiova, 2009.
5. G. Baranenkova, B. Demidovich, V. E. Menko, S. Kogan, G. Lunts, E. Porshneva, E. Sycheva, S. Frolov, R. Shostak, A. Yanpolsky, *3193 Problems in Mathematical Analysis*, 2011, <http://mpec.sc.mahidol.ac.th/RADOK/phymath/mat12/start.htm>.
6. O. Cira, *Lecții de Mathcad 2001 Professional*, ed. Grupul microInformatica, Cluj-Napoca, 2003.
7. J. Craig, B. Walls, *Mathematica Workshop (Introduction to Mathematica 6 and 7)*, 2011, http://facstaff.gpc.edu/~jcraig/calc1/mathematica6_7_handout.pdf
8. I. Iatan, *Îndrumător de laborator în Matlab 7.0*, ed. Conspress, București, 2009.
9. I. Popa, *Analiză matematică. Calcul diferențial*, ed. MatrixRom, București, 2000.
10. V. Postelnicu, S. Coatu, *Mică enciclopedie matematică*, ed. Tehnică, București, 1980.



L7. Lecția de Laborator 7. Utilizarea formelor pătratice în Mathcad și Mathematica

L7.1. Breviar teoretic

Algoritmul L7.1 pentru obținerea unei expresii canonice pentru o formă pătratică, bazat pe *metoda Gauss- Lagrange* este o metodă elementară, care presupune gruparea convenabilă a termenilor:

Pasul 1. Dacă $f : V \rightarrow K$ o formă pătratică, V fiind un spațiu vectorial peste K , de dimensiune finită n , atunci se scrie matricea A , asociată lui f în raport cu baza $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ a lui V .

Pasul 2. Dacă $a_{11} \neq 0$ și f are expresia analitică

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^{(i)} x^{(j)}, \quad (\forall) \bar{x} = \sum_{i=1}^n x^{(i)} \bar{e}_i,$$

atunci grupând termenii care conțin variabila $x^{(1)}$, se obține

$$f(\bar{x}) = a_{11} (x^{(1)})^2 + 2 \sum_{k=2}^n a_{1k} x^{(1)} x^{(k)} + \sum_{i,j \neq 1}^n a_{ij} x^{(i)} x^{(j)}.$$

Altfel ($a_{11} = 0$), dacă $a_{rp} \neq 0$, pentru $r \neq p$ atunci se face schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x^{(r)} = t^{(r)} + t^{(p)} \\ x^{(p)} = t^{(r)} - t^{(p)} \\ x^{(1)} = t^{(1)} \end{cases}$$

și se va obține o expresie analitică în care coeficienții lui $(t^{(r)})^2$ și $(t^{(p)})^2$ sunt nenuli.

Pasul 3. Se adăugă și se scad termenii necesari pentru a scrie pe f sub forma

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{a_{11}} (a_{11} x^{(1)} + a_{12} x^{(2)} + \dots + a_{1n} x^{(n)})^2 + \sum_{i,j=2}^n a'_{ij} x^{(i)} x^{(j)},$$

unde $\sum_{i,j=2}^n a'_{ij} x^{(i)} x^{(j)}$ nu conține pe $x^{(1)}$.

Pasul 4. Se efectuează schimbarea de coordonate



$$\begin{cases} z^{(1)} = a_{11}x^{(1)} + a_{12}x^{(2)} + \dots + a_{1n}x^{(n)} \\ z^{(2)} = x^{(2)} \\ \vdots \\ z^{(n)} = x^{(n)} \end{cases}$$

care corespund noii baze $B_1 = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$, raport cu care, forma f are expresia analitică

$$f = \frac{1}{a_{11}} \left(z^{(1)} \right)^2 + \sum_{i,j=2}^n a'_{ij} z^{(i)} z^{(j)}.$$

Pasul 5. Se tratează forma pătratică

$$f_1 = \sum_{i,j=2}^n a'_{ij} z^{(i)} z^{(j)}$$

în $n - 1$ variabile prin procedeul descris anterior, precum forma f .

Pasul 6. După cel mult $n - 1$ pași se obține o bază $B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n\}$ a lui V , relativ la care forma pătratică f se reduce la expresia canonică.

Algoritmul L7.2 pentru obținerea unei expresii canonice pentru o formă pătratică, bazat pe *metoda Jacobi*:

Pasul 1. Se determină matricea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ asociată formei pătratice $f : V \rightarrow K$, V fiind un spațiu vectorial peste corpul K , de dimensiune finită n , relativ la baza $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ a lui V .

Pasul 2. Calculăm minorii principali:

$$\begin{cases} \Delta_1 = a_{11} \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ \vdots \\ \Delta_n = \det A. \end{cases}$$

Pasul 3. Dacă toți minorii determinați la pasul anterior sunt nuli, atunci există o bază $B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n\}$ a lui V , în raport cu care forma pătratică f are expresia canonică. Căutăm vectorii $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n$ de forma:



$$\begin{cases} \bar{e}'_1 = c_{11}\bar{e}_1 \\ \bar{e}'_2 = c_{21}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2 \\ \vdots \\ \bar{e}'_i = c_{i1}\bar{e}_1 + c_{i2}\bar{e}_2 + \dots + c_{ii}\bar{e}_i \\ \vdots \\ \bar{e}'_n = c_{n1}\bar{e}_1 + c_{n2}\bar{e}_2 + \dots + c_{nn}\bar{e}_n, \end{cases}$$

unde c_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$ sunt soluțiile sistemelor:

$$\begin{cases} c_{i1}a_{11} + c_{i2}a_{12} + \dots + c_{ii}a_{1i} = 0 \\ c_{i1}a_{21} + c_{i2}a_{22} + \dots + c_{ii}a_{2i} = 0 \\ \vdots \\ c_{i1}a_{i-1,1} + c_{i2}a_{i-2,2} + \dots + c_{ii}a_{i-1,i} = 0 \\ c_{i1}a_{i1} + c_{i2}a_{i2} + \dots + c_{ii}a_{ii} = 1. \end{cases}$$

Pasul 4. Se determină expresia canonică a formei pătratice f , relativ la baza B' :

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} (y^{(i)})^2,$$

unde

- $y^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$ sunt coordonatele lui $\bar{x}$ în baza B' ,
- $\Delta_0 = 1$.

Algoritmul L7.3 pentru obținerea unei expresii canonice pentru o formă pătratică, bazat pe metoda valorilor proprii:

Pasul 1. Dacă $f : V \rightarrow \mathfrak{R}$ este o formă pătratică reală, V fiind un spațiu vectorial real Euclidian atunci se alege o bază ortonormată $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ a lui V și se scrie matricea A , asociată lui f în raport cu baza B .

Pasul 2. Se determină valorile proprii $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathfrak{R}$ ale matricei A , cu multiplicitățile algebrice corespunzătoare $a_{\lambda_1}, \dots, a_{\lambda_r}$, cu $a_{\lambda_1} + \dots + a_{\lambda_r} = n$.

Pasul 3. Pentru subspațiile proprii $W_{\lambda_1}, \dots, W_{\lambda_r}$ asociate valorilor proprii $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ se determină bazele ortonormate $B_1, \dots, B_r$, folosind procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt.

Pasul 4. Se consideră baza ortonormată $B' = B_1 \cup \dots \cup B_r$ a lui V și se scrie expresia canonică a lui f în raport cu baza B' , adică



$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (y^{(i)})^2,$$

unde

$$\bar{x}_{B'} = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)})^t.$$

L7.2. Reducerea formelor pătratice la expresia canonică

Exemplul L7.4. Se consideră forma pătratică

$$Q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, Q(\bar{x}) = (x^{(1)})^2 + 2x^{(1)}x^{(2)} + 2(x^{(2)})^2 - 4x^{(2)}x^{(3)} + (x^{(3)})^2 + x^{(1)}x^{(4)} - (x^{(4)})^2.$$

Folosind metoda Gauss- Lagrange să se aducă Q la expresia canonică.

Mathematica:

```
In[5]:= Q = (x1 + x2 + x4 / 2) ^2 + x2^2 - 4 * x2 * x3 - 5 / 4 * x4^2 - x2 * x4 + x3^2;
```

```
In[12]:= Q /. {x1 + x2 + x4 / 2 -> y1, x2 -> y2, x3 -> y3, x4 -> y4}
```

```
Out[12]= y1^2 + y2^2 - 4 y2 y3 + y3^2 - y2 y4 - (5 y4^2)/4
```

```
In[14]:= Q1 = y1^2 + (y2 - 2 * y3 - 1 / 2 * y4) ^2 - 3 * y3^2 - 3 / 2 * y4^2 - 2 * y3 * y4;
```

```
In[15]:= Q1 /. {y1 -> z1, y2 - 2 * y3 - 1 / 2 * y4 -> z2, y3 -> z3, y4 -> z4}
```

```
Out[15]= z1^2 + z2^2 - 3 z3^2 - 2 z3 z4 - (3 z4^2)/2
```

```
In[18]:= Q2 = z1^2 + z2^2 - 1 / 3 * (3 * z3 + z4) ^2 - 7 / 6 * z4^2
```

```
Out[18]= z1^2 + z2^2 - (7 z4^2)/6 - (1/3) (3 z3 + z4)^2
```

```
In[19]:= Q2 /. {z1 -> t1, z2 -> t2, 3 * z3 + z4 -> t3, z4 -> t4}
```

```
Out[19]= t1^2 + t2^2 - (t3^2)/3 - (7 t4^2)/6
```

Exemplul L7.5. Folosind metoda Jacobi aflați expresia canonică și baza în care se realizează aceasta pentru forma pătratică

$$Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, Q(\bar{x}) = x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_2x_3 - 16x_1x_3, (\forall) \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$



Mathcad:

ORIGIN := 1

Metoda Jacobi

$$Q(x) := (x_1)^2 + 7 \cdot (x_2)^2 + (x_3)^2 - 8 \cdot x_1 \cdot x_2 - 8 \cdot x_2 \cdot x_3 - 16 \cdot x_1 \cdot x_3$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Aa := \text{submatrix}(A, 1, 2, 1, 2)$$

$$\Delta_1 := 1$$

$$\Delta_2 := A_{1,1}$$

$$\Delta_3 := |Aa|$$

$$\Delta_4 := |A|$$

$$f(y) := \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} \cdot (y_i)^2 \right]$$

$$f(y) \rightarrow (y_1)^2 - \frac{(y_2)^2}{9} + \frac{(y_3)^2}{81}$$

Determinarea bazei

$$I := \text{identity}(3)$$

$$i := 1 \dots 3$$

$$e_i := \hat{I}^{(i)}$$

$$c_{1,1} := x \cdot A_{1,1} = 1 \text{ solve, } x \rightarrow 1$$

$$ep1 := c_{1,1} \cdot e_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Bb := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Xx := \text{lsolve}(Aa, Bb)$$

$$c_{2,1} := Xx_1 \quad c_{2,2} := Xx_2$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$ep2 := c_{2,1} \cdot e_1 + c_{2,2} \cdot e_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X := \text{lsolve}(A, B)$$



$$c_{3,1} := X_1 \quad c_{3,2} := X_2 \quad c_{3,3} := X_3$$

$$ep_3 := c_{3,1} \cdot e_1 + c_{3,2} \cdot e_2 + c_{3,3} \cdot e_3 \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{8}{81} \\ -\frac{4}{81} \\ \frac{1}{81} \end{pmatrix}$$

Exemplul L7.6. Folosind metoda valorilor proprii determinați expresia canonică și baza în care se realizează aceasta pentru forma pătratică

$$f : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}, \quad f(\bar{x}) = (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2 + (x^{(3)})^2 + x^{(1)}x^{(2)} + x^{(1)}x^{(3)} + x^{(2)}x^{(3)}.$$

Mathematica:

```
In[23]:= A = {{1, 1/2, 1/2}, {1/2, 1, 1/2}, {1/2, 1/2, 1}}
```

```
Out[23]:= {{1, 1/2, 1/2}, {1/2, 1, 1/2}, {1/2, 1/2, 1}}
```

```
In[24]:= Id = IdentityMatrix[3]
```

```
Out[24]:= {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

```
In[30]:= sol = Solve[Det[A - λ * Id] == 0, λ]
```

```
Out[30]:= {{λ -> 1/2}, {λ -> 1/2}, {λ -> 2}}
```

```
In[33]:= s = λ /. sol
```

```
Out[33]:= {1/2, 1/2, 2}
```

```
In[34]:= m = A - 2 * Id
```

```
Out[34]:= {{-1, 1/2, 1/2}, {1/2, -1, 1/2}, {1/2, 1/2, -1}}
```

```
In[36]:= m . {x1, x2, x3} == {0, 0, 0}
```

```
Out[36]:= {-x1 + x2/2 + x3/2, x1/2 - x2 + x3/2, x1/2 + x2/2 - x3} == {0, 0, 0}
```

```
In[37]:= Solve[%, {x1, x2, x3}]
```

```
Out[37]:= {{x2 -> x1, x3 -> x1}}
```

```
In[38]:= m1 = A - 1/2 * Id
```

```
Out[38]:= {{1/2, 1/2, 1/2}, {1/2, 1/2, 1/2}, {1/2, 1/2, 1/2}}
```



```

In[39]:= m1.{x1, x2, x3} == {0, 0, 0}
Out[39]:=  $\left\{\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2}, \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2}, \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2}\right\} = \{0, 0, 0\}$ 

In[40]:= Solve[%, {x1, x2, x3}]
Out[40]:= {{x3 -> -x1 - x2}}

In[43]:= f = {s[[3]], s[[2]], s[[1]]}.{y1^2, y2^2, y3^2}
Out[43]:=  $2 y_1^2 + \frac{y_2^2}{2} + \frac{y_3^2}{2}$ 

In[44]:= c1 = {1, 1, 1}; c2 = {1, 0, -1}; c3 = {0, 1, -1};
In[45]:= f1 = c1 / Norm[c1]
Out[45]:=  $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ 

In[46]:= f2 = c2 / Norm[c2]
Out[46]:=  $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ 

In[47]:= Solve[(c3 +  $\alpha$  * c2) . c2 == 0,  $\alpha$ ]
Out[47]:=  $\left\{\left\{\alpha \rightarrow -\frac{1}{2}\right\}\right\}$ 

In[48]:= f3 = (c3 - 1/2 * c2) / Norm[(c3 - 1/2 * c2)]
Out[48]:=  $\left\{-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$ 

In[49]:= Ap = DiagonalMatrix[{2, 1/2, 1/2}] // MatrixForm
Out[49]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$


```

L7.3. Exerciții propuse

1. Fie $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică a cărei expresie analitică în raport cu baza canonică a

lui $\mathbb{R}^4$ este $f(\bar{x}) = x_1 x_2 - x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_1, (\forall) \bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

a) Să se scrie matricea lui f în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$ și expresia analitică a polareii lui f în raport cu aceeași bază.



- b) Folosind metoda lui Gauss să se determine o expresie canonică pentru f și o bază a lui $\mathbb{R}^4$ în raport cu care f are această expresie canonică.
- c) Să se precizeze signatura lui f .
2. Folosind metoda Jacobi aflați expresia canonică și baza în care se realizează aceasta pentru forma pătratică
- a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, Q(\bar{x}) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
- b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, Q(\bar{x}) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.
3. Folosind metoda valorilor proprii determinați expresia canonică și baza în care se realizează aceasta pentru forma pătratică
- a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(\bar{x}) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$,
- b) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, f(\bar{x}) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_1x_3 - 4x_3x_4$.
- Să se precizeze signatura lui f .
4. Să se determine o bază ortonormată a spațiului vectorial $\mathbb{R}^3$ în raport cu care forma pătratică $f(\bar{x}) = -x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$ are expresie canonică.
5. Fie $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică a cărei expresie analitică în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$ este $f(\bar{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 - x_4^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 12x_2x_3 - 4x_2x_4 - 8x_3x_4$. Folosind metoda lui Gauss să se determine o expresie canonică pentru f .

L7.4. Bibliografie

1. M. L. Abell, J. P. Braselton, *Mathematica by Example*, Elsevier Academic Press, 2004.
2. G. Anastassiou, I. Iatan, *Intelligent Routines II: Solving Linear Algebra and Differential Geometry with Sage*, Springer, 2014.
3. G. Anastassiou, I. Iatan, *Intelligent Routines: Solving Mathematical Analysis with Matlab, Mathcad, Mathematica and Maple*, Springer, 2013.
4. O. Cira, *Lecții de Mathcad 2001 Professional*, ed. Grupul microInformatica, Cluj-Napoca, 2003.
5. I. Vladimirescu, M. Popescu, *Algebră liniară și geometrie analitică*, ed. Universitaria, Craiova, 1993.



Cuprins

<i>L1. Lecția de Laborator 1. Calcule numerice în Mathcad și Mathematica</i>	<i>1</i>
L1.1. Breviar teoretic	1
<i>L1.1.1. Introducere în Mathcad</i>	<i>1</i>
<i>L1.1.2. Introducere în Mathematica</i>	<i>7</i>
L1.2. Calcul numeric în Mathcad și Mathematica cu aplicații în Algebră	18
L1.3. Calcul numeric în Mathcad și Mathematica cu aplicații în Analiză matematică.....	24
L1.4. Exerciții propuse.....	26
L1.5. Bibliografie.....	29
<i>L2. Lecția de Laborator 2. Calcule simbolice în Mathcad și Mathematica</i>	<i>31</i>
L2.1. Breviar teoretic	31
L2.2. Calcul simbolic în Mathcad și Mathematica cu aplicații în Algebră	36
L2.3. Calcul simbolic în Mathcad și Mathematica cu aplicații în Analiză matematică.....	40
L2.4. Rezolvarea ecuațiilor și a sistemelor de ecuații în Mathcad și Mathematica.....	43
L2.5. Exerciții propuse.....	50
L2.6. Bibliografie.....	55
<i>L3. Lecția de Laborator 3. Reprezentări grafice 2D în Mathcad și Mathematica.....</i>	<i>57</i>
L3.1. Breviar teoretic	57
L3.2. Reprezentarea în coordonate carteziane și polare.....	60
L3.3. Exerciții propuse.....	72
L3.4. Bibliografie.....	74
<i>L4. Lecția de Laborator 4. Reprezentări grafice 3D în Mathcad și Mathematica.....</i>	<i>75</i>
L4.1. Breviar teoretic	75
L4.2. Reprezentarea în coordonate carteziane	78
L4.3. Exerciții propuse.....	91
L4.4. Bibliografie.....	94



<i>L5. Lecția de Laborator 5. Elemente de analiză vectorială în Mathcad și Mathematica.....</i>	95
L5.1. Breviar teoretic	95
L5.2. Fundamentele teoriei câmpurilor	97
L5.3. Exerciții propuse.....	103
L5.4. Bibliografie.....	104
<i>L6. Lecția de Laborator 6. Diferențiabilitatea funcțiilor în Mathcad și Mathematica.....</i>	105
L6.1. Breviar teoretic	105
L6.2. Diferențiabilitatea funcțiilor de mai multe variabile	109
L6.3. Exerciții propuse.....	116
L6.3. Bibliografie.....	118
<i>L7. Lecția de Laborator 7. Utilizarea formelor pătratice în Mathcad și Mathematica</i>	119
L7.1. Breviar teoretic	119
L7.2. Reducerea formelor pătratice la expresia canonică	122
L7.3. Exerciții propuse.....	125
L7.4. Bibliografie.....	126
<i>Cuprins.....</i>	127